الجُمْهوريَّة العَربيَّة السُّوريَّة
وزارة التّربيَة
المركز الوطني لتطوير المناهج التربوية

الرّياضيّات

الجزء الثاني

الصّف الثّاني الثّانوي العلمي

العام الدراسي 2021 - 2022 م
1442 هـ

حقوقُ التّأليفِ والنَّشرِ محفوظةٌ

لوزارةِ التَّربيةِ في الجُمهوريَّةِ العربيَّةِ السّوريَّة

حقوقُ الطّبعِ والتّوزيعِ محفوظةٌ

للمؤسّسةِ العامّةِ للطّباعةِ

طُبِعَ أوّلَ مرّةٍ للعامِ الدّراسيِّ ٢٠١٥ - ٢٠١٦ م

المؤلّفون

فئة من المختصّين

خطّة توزيع منهاج الرياضيات الجزء الثانيّ

يخصص ثلاث حصص أسبوعياً لكتاب الرياضيات الجزء الثاني دون وحدة الإحصاء التي جرى توزيعها مع توزيع الجزء الأول

الشهر	الأسبوع الأول	الأسبوع الثانيّ	الأسبوع الثالث	الأسبوع الرابع
أيلول			① الأشعة تذكرة وتتمات	② مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين ③ مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط
تشرين أول	④ إحداثيّتا مركز الأبعاد المتناسبة – أنشطة	أنشطة مسائل: لنتعلم البحث	مسائل: قُدُماً إلى الأمام	① الزوايا الموجّهة
تشرين ثاني	② خواصّ الزوايا الموجّهة ③ النسب المثلّثية	④ الإحداثيات القطبيّة	مسائل: لنتعلّم البحث	مسائل: قُدُماً إلى الأمام
كانون الأوّل	① تعريف وعبارات الجداء السلّمي	② الإسقاط القائم وقواعد الحساب	③ تطبيقات مسائل: لنتعلم البحث	مسائل: قُدُماً إلى الأمام
كانون الثاني	امتحان الفصل الأوّل – العطلة الانتصافية			① العلاقات العددية في المثلث
شباط	② المستقيم والجداء السلّمي ③ الدائرة والجداء السلّمي	④ النسب المثلّثيّة دساتير الجمع والمضاعفة	مسائل: لنتعلّم البحث	مسائل: قُدُماً إلى الأمام
آذار	① التحاكي في المستوي ② صورة مستقيم، قطعة مستقيمة، دائرة	③ خواصّ التحاكي ومفاعيله	مسائل: لنتعلّم البحث	مسائل: قُدُماً إلى الأمام
نيسان	① عناصر الاحتمال	② الاحتمال المشروط	③ الاستقلال الاحتمالي	أنشطة
أيار	مسائل: لنتعلم البحث	مسائل: قُدُماً إلى الأمام		

مُقدّمة

يأتي منهاجُ الرياضياتِ في الصّف الثّاني الثّانوي العلمي مُتمماً لمنهاجِ الرياضياتِ في الصّف الأوّل الثّانوي الّذي جرى إعدادُه في المركز الوطنيّ لتطويرِ المناهجِ التربوية وفق المعايير الوطنية، مُعتمداً في بنائِه على التّراكم الحلزونيّ للمفاهيم والمهارات وتكامُلِها، إذْ تتطور المفاهيم والمهارات في بناءٍ مترابطٍ، فتُقرَن المعارفُ بالحياة العمليَّة وتُقدَّمُ المادَّةُ العلميةُ بطرائق سهلة متنوعة ومدعّمة بمواقفَ حياتيّة وتتكاملُ مع الموادِّ الدّراسيّة الأخرى.

يشتملُ الكتاب على سبع وحداتٍ يضم كلٌّ منها عدداً من الدروس. ونجدُ في كلِّ وحدةٍ عدداً من الفقراتِ المميَّزةِ التي نُجْمِلُها فيما يأتي:

- المقدّمة: وهي مقدِّمة تحفيزيّة تهدف إلى تنمية اتجاهاتٍ إيجابيةٍ نحو الرياضيات واحترام ما قدمّه العلماء من إسهامات في ميادين العلوم المختلفة.
- انطلاقةٌ نشطةٌ: تهدفُ إلى تعزيزِ المهارات الأساسية التي يحتاجها المتعلّم في هذه الوحدة والإضاءة على مفاهيمها.
- أمثلةٌ: وهي في أغلب الأحيان تعرض حلولاً نموذجية جرى صوغها صوغاً لغوياً سليماً بأسلوب منهجيّ علميّ لتكوّن نماذجَ يجبُ اتباعها عند حلِّ الأنشطة والتدريبات والمسائل.
- أخطاءٌ يجبُ تجنُّبَها: حيث جرت الإشارة إلى الكثير من الأخطاء الشائعة التي يقع فيها الطلاب عادة، أو المفاهيم التي يستعملها الطلاب في غير مكانها أو بأسلوب منقوص.

- منعكساتٌ يجبُ امتلاكَها: وهي فقرةٌ يجري فيها التنويهُ إلى قضايا ومفاهيمَ أساسيّة في الوحدة حيث تُعادُ صياغتُها بأسلوبٍ مختصرٍ ومبسَّطٍ متضمِّنة إرشاداتٍ على كيفية استعمالها في أمثلة توضيحيّة.
- لنتعلّمِ البحثَ: وهي فقرةٌ تُدَرِّب المتعلّمَ على طرائق حلِّ المشكلات وتُشجّعُ التعلُّم الذاتيَّ عن طريق تزوّيد الطالب بمنهجية التفكير الاستقصائيّ وجَعْلِه يطرح على نفسه الأسئلة الصحيحة بهدف الوصول إلى حلول المسائل ثُمّ صوغ هذه الحلول بلغة سليمة.
- قُدُماً إلى الأمامِ: وهي تمارين ومسائل متنوعة ومتدرجة في صعوبتها تشمل في بعض الأحيان مواقف حياتية تُتيحُ للمُتَعَلِّم فُرَص تعلم كثيرة وتعزز مهارات حلّ المسائل والتفكير الناقد لديه.

يبدأ الجزء الثاني بدراسة مركز الأبعاد المتناسبة في الوحدة الأولى وهي استمرار لوحدة الأشعة في كتاب الصف الأول الثّانوي.

وتأتي الوحدة الثانية التي تضم الزوايا الموجّهة والإحداثيّات القطبيّة لتكمل ما درسه الطالب بشأن الدائرة المثلثية، فيوجّه المستوي الإقليديّ، ويُعرّف الإحداثيات القطبية.

ثمّ يأتي الجداء السلميّ في الوحدة الثالثة وهو مفهوم أساسي في دراسة الأشعة، وله تطبيقات جوهرية في الفيزياء (العمل، التدفق،...)، ويجد فيه الطلاب استنتاج العديد من العلاقات المثلثاتية. ثُمّ نجد في الوحدة الرابعة توظيف الجداء السلميّ في عدد من التطبيقات.

أمّا التحاكي في الوحدة الخامسة فهو يُتمّم دراسة التحويلات الهندسية المألوفة التي بدأناها في الصفوف السابقة.

وتهتم الوحدة السادسة بدراسة مبادئ الاحتمال متمّمة ما بدأناه في الصف الأول الثانوي، وأخيراً نصل الى دراسة مستقيم الارتجاع في الوحدةِ السابعة مستكملين مفاهيم الإحصاء التي مرّ بها الطالب في الصفوف السابقة، ولقد حاولنا أن نجعل فيه بعض الأمثلة والتمارين من منهاج الفيزياء لتأكيد الترابط الأفقي بين الفيزياء والرياضيات.

زُوِّدَ الكتابُ أيضاً بمجموعة نماذج اختبارات تشمل مفاهيم الكتاب. وجرى فيها تنويعُ طرائق عرضِ الأسئلةِ، وتضمينُ تمارينَ متدرجة في المستوى لتمكّنَ المتعلّمين من حلِّها تِبعاً لمستوياتِ تحصيلهم. نرجو أن تكون هذه النماذج عوناً للمدرّس في بناء نماذج مشابهة، تساعده في قياس مدى تحقيقه للأهداف التعليمية المطلوبة.

وهنا نريد التّأكيد على أنّ تحقيق الأهداف المرجوة من الكتاب في تنمية مهارات التّفكير المختلفة وخاصّة مهارات التّفكير النّاقد والتّفكير الإبداعيّ، يتطلّب من المدرّس أن يؤدي دور المُيسر والموجّه للعملية التعلُّمية، فيطرح التّساؤلات المُناسبة، ويختار المناسب من الأمثلة، ويرتب الأفكار ترتيباً منطقيّاً، ويوجِّه ممّهداً الطّريق لحلّ المسائل، ويصوغ الحلول صياغة لغوية سليمة على السبّورة.

وفي النّهاية، نريد أن نتوجّه بالشّكر إلى عدد من الزّملاء الّذين قدّموا إلينا أشكالاً مختلفة من المساعدة، فمنهم من أبدى ملاحظاته على المسودّات الأولى من الوحدات، ومنهم من حلّ المسائل أو تحقّق من صحتها، ومنهم من ساهم في إعادة صياغة بعض الفقرات.

وأخيراً نأمل من زملائنا الإسهام معنا في إنجاح هذه التجربة الجديدة وتزويدنا بمقترحاتهم البنّاءة المتعلقة بهذا الكتاب متعاونين معاً لتطوير الكتاب المدرسي باستمرار.

المُعدّون

المحتوى

① مركز الأبعاد المتناسبة في المستوي 11

1. الأشعّة: تذكرة وتتمات 14
2. مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين 17
3. مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط 21
4. إحداثيّتا مركز الأبعاد المتناسبة 26
نشاط 1. الإثبات بالاستفادة من الأشعّة، مستقيم أولر 31
نشاط 2. إنشاء مركز الأبعاد المتناسبة لأربع نقاط 32
تمرينات ومسائل 36

② الزوايا الموجّهة والإحداثيّات القطبيّة 41

1. الزوايا الموجّهة 44
2. خواصّ الزوايا الموجّهة 50
3. النسب المثلّثيّة 54
4. الإحداثيّات القطبيّة 58
نشاط 1. الضوء الهندسيّ والزوايا الموجّهة 62
نشاط 2. المعادلات المثلّثيّة 62
تمرينات ومسائل 64

③ الجداء السلّمي 73

1. تعريف وعبارات الجداء السلّمي 76
2. الإسقاط القائم وقواعد الحساب 80
3. تطبيقات 83
نشاط 1. حساب المسافات والزوايا 88
نشاط 2. خاصّة مميّزة للمثلّث القائم 88
نشاط 3. المحلّ الهندسي والجداء السلّميّ 90
نشاط 4. مجموعة نقاط والجداء السلّميّ 90
تمرينات ومسائل 92

④ تطبيقات الجداء السلّميّ 103

1. العلاقات العدديّة في المثلّث 105
2. المستقيم والجداء السلّميّ 109
3. الدائرة والجداء السلّميّ 113
4. النسب المثلّثيّة 117
نشاط 1. علاقات خاصّة بالمساحات 122
نشاط 2. طول منصّف داخليّ 123
نشاط 3. بُعد نقطة عن مستقيم 123
نشاط 4. إنشاء مخمّس منتظم 124
نشاط 5. جماعة مستقيمات ومحل هندسيّ 125
تمرينات ومسائل 126

⑤ التحاكي 135

1. التحاكي في المستوي 137
2. صورة مستقيم، وصورة قطعة مستقيمة، وصورة دائرة 142
3. خواص التحاكي ومفاعيله 146
نشاط 1. قطع مستقيمة متحاكية 150
نشاط 2. محلات هندسيّة بالاستفادة من التحاكي 150
نشاط 3. مسائل إنشاء 151
تمرينات ومسائل 153

⑥ الاحتمالات

1. عناصر الاحتمال 164
2. مبرهنات في الاحتمال 168
3. الاحتمال المشروط 174
4. الاستقلال الاحتماليّ 180
تمرينات ومسائل 000

⑦ الإحصاء (مستقيم الارتجاع)

1. المتوسط الحسابيّ والانحراف المعياريّ 196
2. التغاير ومعامل الارتباط 200
3. مستقيم الارتجاع 203
تمرينات ومسائل 207

أمثلة على اختبارات نموذجيّة 211

مسرد المصطلحات العلمية 223

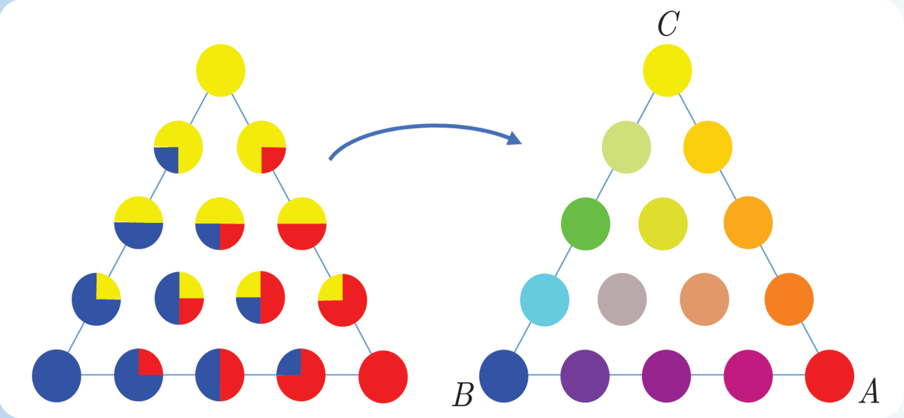
1

مركز الأبعاد المتناسبة في المستوي

1. الأشعة - تذكرة وتتمّات
2. مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين
3. مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط
4. إحداثيّات مركز الأبعاد المتناسبة

كيف نعبّر عن جميع الألوان انطلاقاً من ثلاثة ألوان أساسيّة؟

منذ أن اكتشف إسحاق نيوتن طيف ألوان الضوء الأبيض عند تحليله بواسطة موشور والعلماء يجربون طرائق عدّة لتمييز الألوان ووصفها. واقترح بعض الرسامين نظاماً يجري فيه التعبير عن أيّ لون بواسطة ثلاثة ألوان أساسية هي الأزرق والأحمر والأصفر.



نضع الألوان الأساسيّة عند رؤوس مثلث ABC، ونعتبر كلّ نقطة M داخل المثلث وكأنها تمثّل لوناً. فتؤول المسألة إلى تعيين أعداد r و b و y بحيث تتحقّق المساواة الشعاعية $r\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+y\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. تُمثّل الأعداد r و b و y نسب الألوان الأساسيّة اللازم مزجها للحصول على لون النقطة M.

نقول إنّ النقطة M هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,r)، (B,b)، (C,y). إذْ تفيد الأعداد r و b و y في تحديد موقع النقطة M داخل المثلث تحديداً تامّاً.

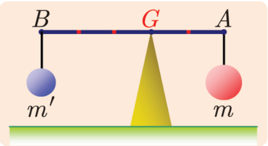
لقد اخترع هذا النظام لتمثيل نقاط المستوي بوصفها مراكز الأبعاد المتناسبة لثلاثة نقاط ليست على استقامة واحدة الفلكيّ أوغسطس فرديناند موبيوس Augustus Ferdinand Möbius عام 1827.

مركز الأبعاد المتناسبة في المستوي

انطلاقة نشطة

استفدنا في دراستنا السابقة من الأداة التحليليّة والأداة الشعاعيّة في دراسة مسائل التوازي والوقوع على استقامة واحدة. نهدف في هذه الوحدة إلى تقديم أداة جديدة هي مركز الأبعاد المتناسبة. مسائل توازن الميزان، ومركز العطالة، ومركز الثقل، والمتوسط الإحصائيّ، هي مجالات مختلفة تظهر فيها فكرة مركز الأبعاد المتناسبة، أي نقطة التوازن.

توازن قضيب معدنيّ



على طرفَي قضيب مهمل الكتلة نعلّق كتلتين m في A و m' في B. تُبيِّن التجربة أنّ القضيب يكون متوازناً إذا علّقناه عند النقطة G التي تُحقّق $m \times GA = m' \times GB$ (قانون أرخميدس).

رياضيّاً، لمّا كان الشعاعان $\overrightarrow{GA}$ و $\overrightarrow{GB}$ مرتبطين خطّياً ومتعاكسين بالجهة، أمكننا ترجمة العلاقة السابقة بالمساواة $m\overrightarrow{GA} = -m'\overrightarrow{GB}$ أو $m\overrightarrow{GA} + m'\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ $\quad [1]$

وعليه تكون النقطة G نقطة توازن A و B مزوّدتين بالكتلتين m و m'.

① في حالة الشكل المجاور نفترض أنّ $m = 18\,\text{kg}$. احسب m' في حالة التوازن.

② نفترض أنّ $m = 8\,\text{kg}$ و $m' = 2\,\text{kg}$.

❶ استفد من العلاقة $[1]$ لتعبِّر عن $\overrightarrow{GA}$ بدلالة $\overrightarrow{GB}$.

❷ أثبت، باستعمال علاقة شال $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}$ أنّ $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$. عيّن موقع النقطة G على القطعة المستقيمة $[AB]$.

③ عيِّن على شكل فيه $AB = 10\,\text{cm}$ موقع النقطة G التي تحقق التوازن في الحالتين الآتيتين:

❶ $m = 4\,\text{kg}$ و $m' = 6\,\text{kg}$.

❷ $m = 14\,\text{kg}$ و $m' = 6\,\text{kg}$.

الخلاصة: يتحقّق التوازن، في الشكل السابق عندما $m = 3\,\text{kg}$ و $m' = 2\,\text{kg}$. نتعامل في الرياضيّات مع أوضاع عامّة لا تتعلّق بطبيعة الظواهر المدروسة. فنقول في وصف ما سبق إننا **نُسنِدُ** الثابت 2 إلى النقطة B ونُسنِدُ الثابت 3 إلى النقطة A، وإنّ G معرّفة بالعلاقة $3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. نقول إنّ G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المُثقّلتين $(A,3)$ و $(B,2)$.

1 الأشعة - تذكرة وتتمّات

1.1 الارتباط الخطّي

نقول إنّ الشّعاعين غير المعدومين $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$ **مرتبطان خطّياً** إذا كان لهما المنحى نفسه.
أي إذا كان المستقيمان (AB) و (CD) متوازيين.

مُبرهَنة 1

① علاقة الارتباط الخطّي: نقول إنّ الشّعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطّياً إذا وفقط إذا نتج أحدهما من الآخر بضربه بعدد حقيقي، أي إذا وُجِدَ عددٌ حقيقي k يُحقّق $\vec{u}=k\vec{v}$، أو إذا وُجِدَ عددٌ حقيقي k' يُحقّق $\vec{v}=k'\vec{u}$.

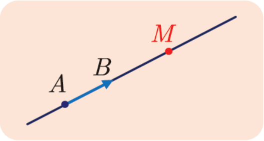
② العبارة التحليليّة للارتباط الخطّي: في مستوٍ مزوّد بمَعلَم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، يكون الشّعاعان $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{v}(x',y')$ مرتبطين خطّياً إذا وفقط إذا تحقّق الشرط $xy'-yx'=0$.

③ التوازي: يتوازى المستقيمان (AB) و (CD) إذا وفقط إذا وُجِدَ عددٌ حقيقي k يُحقّق $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$.

④ الوقوع على استقامة واحدة: تقع النقاط A و B و C على استقامة واحدة إذا وفقط إذا وُجِدَ عددٌ حقيقي k يُحقّق $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

نتيجة

المستقيم (AB) هو مجموعة جميع النقاط M التي تجعل الشّعاعين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيّاً. أي تنتمي M إلى المستقيم (AB) إذا وفقط إذا وُجِدَ عددٌ حقيقي k يُحقّق $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$.



المستقيم (AB) هو مجموعة جميع النقاط M التي تحقّق $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$ عندما تتحوّل k في مجموعة الأعداد الحقيقية.

2.1 نظيم شعاع

تعريف 1

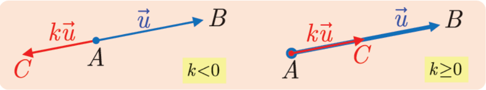
نظيم شعاع $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ هو الطّول AB. ونرمز إلى ذلك كما يأتي $\|\vec{u}\|=\|\overrightarrow{AB}\|=AB$.
ونقول إنّ الشعاع $\vec{u}$ شعاع واحدة إذا كان نظيمه مساوياً 1، (أي واحدة الطول في المستوي).
ونلاحظ أنّ نظيم شعاع $\vec{u}$ لا يتعلّق بتمثيله:
فإذا كان $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ كان $\|\vec{u}\|=AB=CD$.

نتائج

1. إنّ الشّرط $\|\overrightarrow{AB}\| = 0$ يُكافئ $A = B$.

2. أيّاً كان العدد الحقيقي k وأيّاً كان الشّعاع $\vec{u}$ كان $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.

في الحقيقة، إذا كان $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $k\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ كان لدينا، استناداً إلى تعريف ضرب الأشعّة بعدد، $AC = k \times AB$ عندما $k \geq 0$ و $AC = -k \times AB$ عندما $k < 0$. أي $AC = |k| \times AB$ أو $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.



3. في مستوٍ مزوّد بمَعْلَم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، يعطى نظيم $\vec{u}(x,y)$ بالصيغة $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

في الحقيقة، إذا عرّفنا النقطة M بالعلاقة $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$، كانت (x,y) هما إحداثيّتا M . إذن $\|\vec{u}\| = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$.

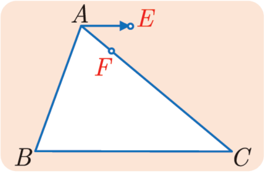
تكريساً للفهم

لماذا ندرس الارتباط الخطّي للأشعّة ؟

لأنّ ذلك يفيدنا في إثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة أو إثبات توازي مستقيمين.

مثال كيف نثبت وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة؟

نتأمّل مثلّثاً ABC. ونعرّف النقطتين E و F بالعلاقتين $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AF}$. أثبت وقوع النقاط B و E و F على استقامة واحدة.



لإثبات أنّ النقاط B و E و F تقع على استقامة واحدة، يكفي أن نثبت علاقة ارتباط خطّي من الصيغة $\overrightarrow{FB} = k\overrightarrow{FE}$.

الحل

إذا تأمّلنا الشكل رأينا أنّه يمكن التعبير عن الشّعاع $\overrightarrow{BF}$ بدلالة الشّعاعين $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CF}$ بالعلاقة $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF}$. ولكن $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AE}$، وكذلك

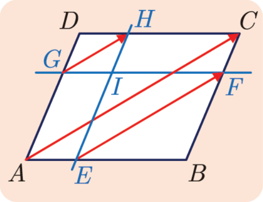
$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AF} - 5\overrightarrow{AF} = -4\overrightarrow{AF}$$

إذن $\overrightarrow{BF} = 4\overrightarrow{AE} - 4\overrightarrow{AF} = 4\left(\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AE}\right) = 4\overrightarrow{FE}$

ومنه النتيجة المطلوبة.

مثال كيف نثبتُ توازي مستقيمين؟

نتأمّل متوازي أضلاع $ABCD$، وعدداً حقيقياً k مختلفاً عن 0 و 1. ونعرّف النقطتين E و G بالعلاقتين: $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AG} = (1-k)\overrightarrow{AD}$.



نرسم المستقيم الموازي للمستقيم (AD) والمارّ بالنقطة E فيقطع المستقيم (CD) في H. وكذلك نرسم المستقيم الموازي للمستقيم (AB) والمارّ بالنقطة G فيقطع المستقيم (BC) في F. أثبت أنّ المستقيمات (EF) و (GH) و (AC) متوازية.

لإثبات أنّ المستقيمات (EF) و (GH) و (AC) متوازية، يكفي أن نثبت أنّ للأشعّة $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{GH}$ المنحى نفسه.

الحل

سنعرض حلاً تحليليّاً للمسألة، لنختر $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ مَعْلَماً للمستوي. وخصوصاً أنه بهذا الاختيار يكون للنقاط A، B، C، D، E، F، G، H إحداثيّات بسيطة. فنجد مثلاً :

$$A(0,0) \text{ و } C(1,1) \text{ و } E(k,0) \text{ و } G(0,1-k) \text{ و } F(1,1-k) \text{ و } H(k,1)$$

نستنتج من ذلك مركّبات الأشعّة $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{GH}$ وهي كما يأتي

$$\overrightarrow{GH}(k,k),\quad \overrightarrow{EF}(1-k,1-k),\quad \overrightarrow{AC}(1,1)$$

ينتج من ذلك أنّ $\overrightarrow{GH} = k\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{EF} = (1-k)\overrightarrow{AC}$. إذن للأشعّة $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{GH}$ المنحى نفسه، والمستقيمات (EF) و (GH) و (AC) متوازية.

تَدَرَّبْ

① ليكن $ABCD$ مستطيلاً فيه $AB = 4\,\text{cm}$ و $AD = 3\,\text{cm}$. نعرّف $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. مثّل الشعاعين $\vec{u}+\vec{v}$ و $\vec{u}-\vec{v}$، ثُمّ احسب $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ و $\|\vec{u}-\vec{v}\|$.

② ليكن ABC مثلّثاً متساوي الأضلاع طول ضلعه $4\,\text{cm}$. نعرّف $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

1. توثّق أنّ $\vec{u}-\vec{v} = \overrightarrow{CB}$، واستنتج قيمة $\|\vec{u}-\vec{v}\|$.
2. عيّن النقطة D التي تحقّق $\overrightarrow{AD} = \vec{u}+\vec{v}$. ما نوع الرباعي $ABDC$؟ استنتج قيمة $\|\vec{u}+\vec{v}\|$.

③ في مستوٍ مزوّد بمَعْلَم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، نتأمّل الشّعاعين $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ و $\vec{v} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$.

1. أثبت أنّ $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.
2. نتأمّل الشعاعين $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. ما هي طبيعة المثلّث OAB؟

المساواة $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ ليست صحيحة بوجه عام، ولكننا ندرس في هذا التمرين حالة خاصّة تكون فيها هذه المساواة صحيحة.

مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين

1.2. مبرهنة الوجود والتعريف

مُبرهَنة 2

لنتأمل نقطتين A و B، وعددين حقيقيّين α و β[☝] يُحقّقان $\alpha+\beta\neq 0$. عندئذ توجد نقطة، ونقطة وحيدة فقط، G تُحقّق $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

نسمّي النقطة G هذه **مركز الأبعاد المتناسبة** للنقطتين المثقّلتين (A,α) و (B,β).

الإثبات

في الحقيقة، تُكافئ العلاقة $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ كلّاً من العلاقات الآتية على التوالي :

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0}$$

ثُمّ

$$(\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$

وأخيراً

$$\overrightarrow{GA}=-\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

لأنّ $\alpha+\beta\neq 0$.

إذن يؤول إيجادُ G تُحقّق الشرط $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ إلى إيجادِ G تُحقِّق الشرط:

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}\qquad (*)$$

ولكن من الواضح أنّه توجد نقطة وحيدة G تُحقِّق الشرط $(*)$ ومنه النتيجة المطلوبة.

تعريف 2

نقول إنّ النقطة G هي **مركز الأبعاد المتناسبة** للنقطتين المثقّلتين (A,α) و (B,β)، أو إنّها مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين A و B وقد أُسْنِدَ إليهما الثابتان α و β بالترتيب، إذا تحقَّق الشرطان:

$$\alpha+\beta\neq 0 \quad \text{و} \quad \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}.$$

2.2. تجانس مركز الأبعاد المتناسبة

مُبرهَنة 3

إذا كانت النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين (A,α) و (B,β)، كانت G أيضاً مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(A,k\alpha)$ و $(B,k\beta)$ أياً كان العدد الحقيقيّ غير المعدوم k.

[☝] α حرفٌ يوناني يُقرأ «ألفا» و β حرفٌ يوناني آخر يُقرأ «بيتا».

الإثبات

في الحقيقة، نستنتج من المساواة $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ أنّ $k\alpha\,\overrightarrow{GA}+k\beta\,\overrightarrow{GB}=\vec{0}$. ولكن $k\alpha+k\beta=k(\alpha+\beta)\neq 0$ لأنّ $k\neq 0$ و $\alpha+\beta\neq 0$.

إذن G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(A,k\alpha)$ و $(B,k\beta)$.

نتيجة

في حالة $\alpha=\beta$ و $(\alpha\neq 0)$، تكون النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقَّلتين $(A,1)$ و $(B,1)$. أي $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ وهذا يعني أنّ G هي منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ في حالة $A\neq B$.

3.2. اختزال العبارة $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$ في حالة $\alpha+\beta\neq 0$.

مُبرهَنة 4

ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين (A,α) و (B,β). عندئذ أيّاً كانت النقطة M كان

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$$

الإثبات

أيّاً كانت النقطة M كان

$$\begin{aligned}\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}&=\alpha\overrightarrow{MG}+\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{MG}+\beta\overrightarrow{GB}\\&=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}+\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}\end{aligned}$$

ونجد النتيجة المطلوبة لأنّ $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

إذا كان G منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$، كان $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MG}$، وذلك أيّاً كانت النقطة M.

تكريساً للفهم

كيف نميِّز نقاط مستقيم بالاستفادة من مركز الأبعاد المتناسبة ؟

- إنّ مركز الأبعاد المتناسبة G للنقطتين المثقّلتين (A,α) و (B,β)، هو أيضاً النقطة G التي تُحقّق $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$. إذن كلُّ مركز أبعاد متناسبة للنقطتين A و B هو نقطة من المستقيم (AB).

- وبالعكس، لتكن M نقطة من المستقيم (AB). أيوجد اختيار مناسب للثابتين α و β يجعل M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين (A,α) و (B,β)؟

نعم، في الحقيقة، لمّا كانت M نقطة من المستقيم (AB)، استنتجنا أنّه يوجد عدد حقيقي k يُحقّق $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$. إذن

$$\overrightarrow{AM} = k(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) \quad \text{أو} \quad (1-k)\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

ولأنّ $(1-k)+k \neq 0$ استنتجنا أنّ M هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(A,1-k)$ و (B,k).

الخلاصة. المستقيم (AB) هو مجموعة مراكز الأبعاد المتناسبة M للنقطتين المثقّلتين $(A,1-k)$ و (B,k) عندما يتحوّل الثابت k في $\mathbb{R}$. لأنّ المستقيم (AB) هو مجموعة النقاط M التي تحقّق $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ عندما يتحوّل الثابت k في $\mathbb{R}$.

كيف نعبّر عن مساواة شعاعيّة بالاستفادة من مركز الأبعاد المتناسبة ؟

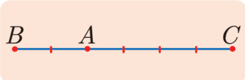
- إذا كانت H نقطة تُحقّق $3\overrightarrow{HA} - 2\overrightarrow{HB} = \vec{0}$، كانت H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(A,3)$ و $(B,-2)$.
- إذا كانت M النقطة من المستقيم (AB) المعرّفة بالعلاقة $\overrightarrow{AM} = \frac{7}{2}\overrightarrow{AB}$. كتبنا، كما في الملاحظة السابقة $2\overrightarrow{AM} = 7(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB})$، واستنتجنا $-5\overrightarrow{MA} + 7\overrightarrow{MB} = \vec{0}$، أي إنّ M هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(A,-5)$ و $(B,7)$.

ما السبب الذي يجعل الشرط $\alpha + \beta \neq 0$ شرطاً ضرورياً ؟

إذا افترضنا أنّ $\alpha + \beta = 0$ أي $\beta = -\alpha$، وأنّه توجد G تحقّق $\alpha\overrightarrow{GA} - \alpha\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ استنتجنا أنّ $\alpha(\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}) = \vec{0}$ أو $\alpha\overrightarrow{BA} = \vec{0}$ وهذا مستحيلُ التحقُّق في حالة $\alpha \neq 0$ و $A \neq B$.
وعليه، في حالة $A \neq B$، لا يوجد مركز أبعاد متناسبة للنقطتين المثقّلتين $(B,-3)$ و $(A,3)$.

مثال كيف نكتب نقطةً مركزَ أبعاد متناسبة لنقطتين؟

نتأمّل ثلاث نقاط A و B و C متوضّعة كما في الشكل المجاور.



1. عيّن عددين حقيقيّين β و γ [1] ليكون A مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين (B,β) و (C,γ).
2. أنشئ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(A,3)$ و $(B,-2)$.

---

[1] γ حرفٌ يوناني يُقرأ «غامّا»

الحل

1. الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطيّاً و $\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AB}$. إذن $\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$. فالنقطة A هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(B,2)$ و $(C,1)$.

2. يُكافئ الفرْض العلاقة $3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ أو $\overrightarrow{AG}=-2\overrightarrow{AB}$. فالنقطة G تنطبق على C.

تَدرَّبْ

① نعطي النقطتين A و B، ونعرّف G بالشرط المبيَّن أدناه. عيّن عددين α و β كي تكون النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) و (B,β). وذلك في الحالات الآتية.

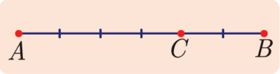
❶ $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{GB}$.

❸ $2\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

❷ $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

❹ إذا كانت النقطة G نظيرة B بالنسبة إلى A.

② النقاط A و B و C مبيّنة في الشكل المجاور. عيِّن في كلٍّ من الحالات الآتية عددين α و β يحقّقان الشرط المعطى.



❶ A هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين (B,α) و (C,β).

❷ B هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين (A,α) و (C,β).

❸ C هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين (A,α) و (B,β).

③ النقاط A و B و C مبيّنة في الشكل المجاور. عيِّن في كلٍّ من الحالات الآتية عددين α و β يحقّقان الشرط المعطى.

❶ A هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين (B,α) و (C,β).

❷ B هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين (A,α) و (C,β).

❸ C هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين (A,α) و (B,β).

3 مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط

1.3. تمديد التعاريف والخواص

مُبرهَنة 5

لنتأمل ثلاث نقاط A و B و C، وثلاثة أعداد حقيقيّة α و β و γ تُحقّق $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.
عندئذ

1. توجد نقطة ونقطة وحيدة فقط G تحقّق $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. نسمّي G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة (A,α) و (B,β) و (C,γ).
2. مهما تكن النقطة M يكن، $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$.

الإثبات

1. بملاحظة المساواتين

$$\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}$$

نرى أنّ العلاقة $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ تُكافئ:

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$

والعلاقة الأخيرة تعرّف نقطة وحيدة G.

2. نكتب

$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}$ و $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}$ و $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}$.

فنجد : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$.

نتائج

1. إذا كان G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة (A,α) و (B,β) و (C,γ) كان G أيضاً مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(A,k\alpha)$ و $(B,k\beta)$ و $(C,k\gamma)$ في حالة $k\neq 0$.
2. إذا أسندنا إلى النقاط A و B و C الثابت غير المعدوم نفسه، حقّق مركز الأبعاد المتناسبة G العلاقة $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ فهو إذن مركز ثقل المثلّث ABC.

2.3. الخاصّة التجميعيّة

مُبرهَنة 6

ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة (A,α) و (B,β) و (C,γ). نفترض أنّ $\alpha+\beta \neq 0$، ونعرّف النقطة H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين (A,α) و (B,β).
عندئذ تكون النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(H,\alpha+\beta)$ و (C,γ).

الإثبات

لدينا تعريفاً $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. وإذا استفدنا من المبرهنة 4. أمكننا أن نكتب، أيّاً كانت النقطة M، $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MH}$. إذن في حالة $M=G$، نجد

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{GH}$$

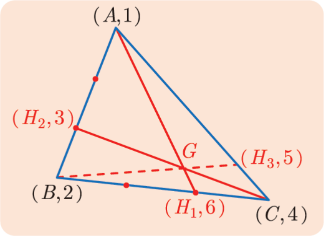
وعليه يكون

$$(\alpha+\beta)\overrightarrow{GH}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

وهذا يثبت أنّ G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(H,\alpha+\beta)$ و (C,γ).

مثال

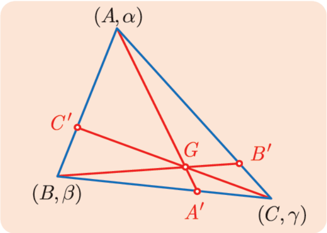
أنشئ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,4)$.



الحل

- لتكن H_1 مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(B,2)$ و $(C,4)$. إذن أيّاً كانت النقطة M كان $2\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{MH_1}$. فإذا اخترنا $M=B$ استنتجنا أنّ $\overrightarrow{BH_1}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. نُسند الثابت $6=4+2$ إلى H_1 فتكون G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(H_1,6)$ و $(A,1)$، أي $\overrightarrow{AG}=\frac{6}{7}\overrightarrow{AH_1}$.
- يمكننا أيضاً أن نعرّف بأسلوب مماثل H_2 مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(A,1)$ و $(B,2)$. أو H_3 مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(A,1)$ و $(C,4)$. عندئذ تنتمي النقطة G إلى كلٍّ من المستقيمات (AH_1) و (CH_2) و (BH_3). فهي إذن تتلاقى في G.

بوجه عام: ليكن المثلّث ABC. ولتكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة (A,α) و (B,β) و (C,γ)، ونفترض أنّ A' هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين (B,β) و (C,γ)، وأنّ B' هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين (A,α) و (C,γ). وكذلك أنّ C' هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين (A,α) و (B,β).



عندئذ تتلاقى المستقيمات (AA') و (BB') و (CC') في نقطة واحدة هي G.

3.3. مركز الأبعاد المتناسبة لعدد من النقاط

بالإمكان تعميم النتائج التي درسناها في حالة نقطتين متقّلتين أو ثلاث إلى حالة عددٍ n من النقاط. لنتأمّل n نقطةً A_1، A_2، ....، A_n في المستوي، وأعداداً حقيقيّة α_1، α_2، ....، α_n تُحقّق الشرط $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \neq 0$. عندئذ

- توجد نقطة G، ونقطة وحيدة فقط، تُحقّق

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2\overrightarrow{GA_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$

نسمّي G **مركز الأبعاد المتناسبة** للنقاط المثقّلة (A_1,α_1)، (A_2,α_2)، ....، (A_n,α_n).

- أيّاً كانت M في المستوي فلدينا

$$\alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)\overrightarrow{MG}$$

نتائج

1. إنّ G هو أيضاً مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(A_1,k\alpha_1)$، ....، $(A_n,k\alpha_n)$، حيث $k \neq 0$.
2. لإيجاد G يمكننا أن نستبدل بعدد p من النقاط، من بين النقاط التي عددها n، مركزَ الأبعاد المتناسبة H لهذه النقاط المثقّلة بعد أن نسند إلى H المجموع غير المعدوم لثوابت هذه النقاط.

تكريساً للفهم

نتيجة مفيدة من المبرهنة 6؟

ليكن المثلّث ABC. نفترض G هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة (A,α) و (B,β) و (C,γ).

- إذا كان $\beta+\gamma \neq 0$ عندئذ يقطع المستقيمُ (AG) المستقيمَ (BC) في النقطة A' مركزِ الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين (B,β) و (C,γ).

في الحقيقة، تنتمي النقطة A' إلى المستقيم (BC) لأنها مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين (B,β) و (C,γ). وهي أيضاً تنتمي إلى المستقيم (AG) لأنّ G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين (A,α) و $(A',\beta+\gamma)$.

- أمّا عندما $\beta+\gamma=0$ فعندها يكون المستقيمان (AG) و (BC) متوازيين. لأنّه في هذه الحالة يكون $\gamma=-\beta$ ومن ثَمّ $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}-\beta\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ حيث $\alpha \neq 0$. إذن $\overrightarrow{GA}=\frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{BC}$، والمستقيمان (AG) و (BC) متوازيان.

ما فائدة المبرهنة 6 ؟

- إرجاع إنشاء مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط إلى إنشاء مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين.
- إثبات تلاقي مستقيمات بنقطة واحدة.
- إثبات وقوع نقاط على استقامة واحدة.

مثال كيف نُثْبِتُ تلاقي مستقيمات؟

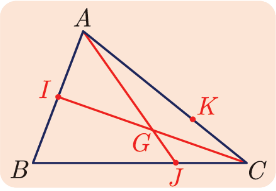
لنتأمّل مثلّثاً ABC. ولتكن A' و B' و C' منتصفات أضلاعه $[BC]$ و $[CA]$ و $[AB]$ على التوالي. أثبت أنّ المتوسطات (AA') و (BB') و (CC') تتلاقى في نقطة واحدة.

الحل

ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$. لمّا كان منتصف $[BC]$ هو النقطة A' وهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(B,1)$ و $(C,1)$، استنتجنا أنّ G هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A',2)$ و $(A,1)$. إذن يمر المستقيم (AA') بالنقطة G.

ونبرهن بأسلوب مماثل أنّ G تنتمي أيضاً إلى كلٍّ من المستقيمين (BB') و (CC'). فالمتوسطات الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة هي G.

مثال كيف نُثْبِتُ وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة؟

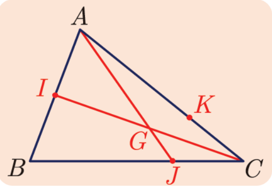


نتأمّل في الشكل المجاور مثلّثاً ABC، ونعرّف النقطة I منتصف $[AB]$، كما نعرّف النقطتين J و K بالعلاقتين

$$\overrightarrow{JB}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$$

وأخيراً نرمز بالرمز G إلى نقطة تقاطع المستقيمين (CI) و (AJ). أثبت أنّ النقاط B و G و K تقع على استقامة واحدة.

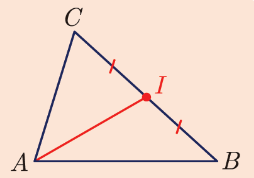
الحل



لمّا كان I منتصف $[AB]$ استنتجنا أنّ I هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,1)$ و $(B,1)$، ونستنتج من العلاقة $\overrightarrow{JB}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$ أنّ J هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(B,1)$ و $(C,2)$. إذن ينتمي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,2)$، إلى كلٍّ من المستقيمين (CI) و (AJ) فهو ينطبق إذن على النقطة G نقطة تقاطع هذين المستقيمين.

ولمّا كان K هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,1)$ و $(C,2)$. استنتجنا أنّ G هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(K,3)$ و $(B,1)$. إذن تقع النقاط B و G و K على استقامة واحدة.

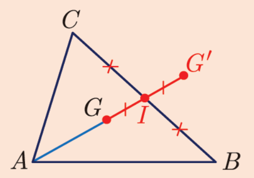
تَدرَّبْ



① ABC مثلّث فيه I منتصف $[BC]$.

❶ أثبت أنّ $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

❷ أَتكون A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(I,-2)$؟



② النقطة G مركز ثقل ABC. و G' نظيرة G بالنسبة إلى I منتصف $[BC]$.

❶ أثبت أنّ G هي منتصف $[AG']$.

❷ أثبت أنّ G' هي مركز أبعاد متناسبة للنقاط A و B و C بعد إسناد ثوابت يطلب تعيينها إلى هذه النقاط.

③ ليكن المثلّث ABC. ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(A,1)$ و $(B,4)$ و $(C,-3)$.

❶ أنشئ النقطة H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(B,4)$ و $(C,-3)$.

❷ استنتج أنّ G هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(A,1)$ و $(H,1)$. ثُمّ أنشئ النقطة G.

4 إحداثيّتا مركز الأبعاد المتناسبة

مُبرهَنة 7

نزوّد المستوي بمعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$. ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة (A_1,α_1) و (A_2,α_2) و … و (A_n,α_n)، ولنفترض أنّ $A_1(x_1,y_1)$ ، $A_2(x_2,y_2)$ ، … ، $A_n(x_n,y_n)$. عندئذ تعطى (x_G,y_G) إحداثيّتا النقطة G بالصيغتين الآتيتين:

$$x_G = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} \quad \text{و} \quad y_G = \frac{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}$$

وخصوصاً، في حالة كون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة (A,α) و (B,β) و (C,γ):

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \quad \text{و} \quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

الإثبات

سيقتصر إثباتنا على حالة $n = 3$. نفترض أنّ G هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة (A,α) و (B,β) و (C,γ)، ولنفترض أيضاً أنّ الشرط $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ محقّقٌ. إذن بناءً على المبرهنة 5، مهما تكن النقطة M ، يكن

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}$$

فإذا اخترنا $M = O$ ، استنتجنا ممّا سبق أنّ

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{OB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{OC}$$

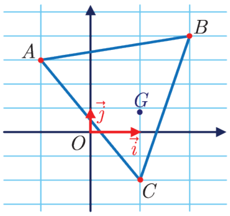
ومنه نستنتج إحداثيّتي النقطة G أي

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \quad \text{و} \quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

وبذا يكتمل الإثبات.

مثال

نتأمّل في مستوٍ مزوّد بمعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ النقاط $A(-1,3)$ و $B(2,4)$ و $C(1,-2)$. عندئذ تعطى (x_G,y_G) إحداثيّتا النقطة G، مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$ بالعلاقتين:



$$x_G = \frac{x_A + 2x_B + 3x_C}{1+2+3} = \frac{-1+4+3}{6} = 1$$

$$y_G = \frac{y_A + 2y_B + 3y_C}{6} = \frac{3+8-6}{6} = \frac{5}{6}$$

تعطي العلاقتان في المبرهنة السابقة إحداثيَّتيْ النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$. إذ ما العلاقتان $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ و $y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2}$ إلاّ حالة خاصّة من المبرهنة 7. لأنّ I هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(A,1)$ و $(B,1)$.

مثال إنشاء مركز الأبعاد المتناسبة لأربع نقاط مثقَّلة.

$ABCD$ مستطيل. أنشئ النقطة G في الحالتين الآتيتين:

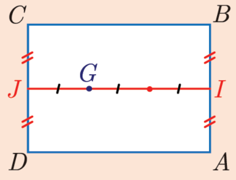
① G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,2)$ و $(D,2)$.

② G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,2)$.

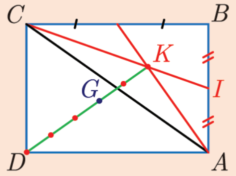
الحل

هناك بوجه عام عدّة طرائق للحل، تعتمد جميعها على الخاصّة التجميعيّة ويختلف بعضها عن بعض بطريقة تجميع النقاط: فيمكننا مثلاً تجميع النقاط مثنى مثنى، ويمكننا أيضاً أن نستبدل بثلاث نقاط مركز أبعادها المتناسبة،....

① في هذا الطلب، يبدو من المناسب أن نستبدل بالنقطتين المثقّلتين $(A,1)$ و $(B,1)$ مركز أبعادهما المتناسبة، وبالنقطتين المثقّلتين $(C,2)$ و $(D,2)$ مركز أبعادهما المتناسبة.



في الحقيقة، إنّ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(A,1)$ و $(B,1)$ هو النقطة I منتصف $[AB]$. وكذلك فإنّ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(C,2)$ و $(D,2)$ هو النقطة J منتصف $[CD]$. إذن G هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(I,2)$ و $(J,4)$ أي $\overrightarrow{IG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{IJ}$.

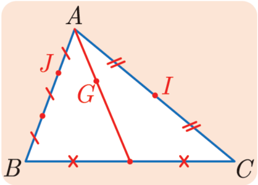


② أمّا في هذا الطلب، فيمكننا أن نتأمّل النقطة K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ لأننا نعلم في هذه الحالة أنّ K هي مركز ثقل المثلّث ABC أو نقطة تلاقي متوسطاته. عندئذ يكون G هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(K,3)$ و $(D,2)$ أي $\overrightarrow{DG} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{DK}$.

مثال اختيار مَعْلَم عند الحل.

نتأمّل مثلّثاً ABC. ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,3)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ ، ولتكن النقطة I منتصف $[AC]$، و J النقطة المعرّفة بالعلاقة $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. أثبت وقوع النقاط I و G و J على استقامة واحدة.

الحل



لإثبات وقوع النقاط I و G و J على استقامة واحدة، سنختار المَعْلَم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$. فتكون إحداثيّات النقطتين B و C على التوالي $(1,0)$ و $(0,1)$. ونستنتج بسهولة من الفرْض أنّ $I\left(0,\frac{1}{2}\right)$ و $J\left(\frac{1}{3},0\right)$.

أمّا إحداثيّتا G فتعطيان بالعلاقتين

$$x_G=\frac{3x_A+x_B+x_C}{5}=\frac{1}{5} \quad \text{و} \quad y_G=\frac{3y_A+y_B+y_C}{5}=\frac{1}{5}$$

وعليه تكون للشعاع $\overrightarrow{IJ}$ المركّبتان $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{2}\right)$، و للشعاع $\overrightarrow{IG}$ المركّبتان $\left(\frac{1}{5},-\frac{3}{10}\right)$.

نستنتج من ذلك أنّ $\overrightarrow{IG}=\frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$، فالشعاعان $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IG}$ مرتبطان خطّياً، وهذا ما يبرهن وقوع النقاط I و G و J على استقامة واحدة.

تَدَرَّبْ

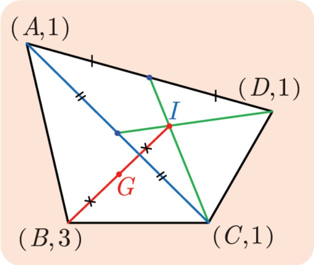
① نتأمّل مثلّثاً ABC، والنقاط I و J و L المعرّفة كما يأتي : I منتصف الضلع $[AB]$ و $\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AL}=3\overrightarrow{AC}$. المستقيم المارّ بالنقطة J موازياً (AC) يقطع المستقيم (BC) في K. نتأمّل المَعلَم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

1. احسب إحداثيّات النقاط I و K و L.
2. أثبت أنّ النقاط I و K و L تقع على استقامة واحدة.

② $ABCD$ مربّع طول ضلعه $5\,\text{cm}$ نهدف في هذا التمرين إلى إنشاء G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$ و $(D,4)$.

1. أنشئ النقطة I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(A,1)$ و $(D,4)$.
2. أنشئ النقطة J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(B,2)$ و $(C,3)$.
3. أثبت أنّ G هو منتصف القطعة المستقيمة $[IJ]$ وأنشئه.

③ يُبيّن الشكل المجاور إنشاءً للنقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,3)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$. علّل صحّة هذا الإنشاء.



أفكار يجب تَمثُّلها

- لا يوجد مركز الأبعاد المتناسبة لنقاط مثقّلة ما لم يكن مجموع الثوابت مختلفاً عن الصفر.
- يتعيّن مركز الأبعاد المتناسبة G للنقطتين المثقّلتين (A,α) و (B,β) بالشرط

$$\alpha+\beta\neq 0 : \quad \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0} \quad \text{أو بالعلاقة} \quad \overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

فالنقاط A ، G ، B تقع على استقامة واحدة.

أمّا مركز الأبعاد المتناسبة G لثلاث نقاط مثقّلة (A,α) و (B,β) و (C,γ) فيتعيّن بالشرط

$$\alpha+\beta+\gamma\neq 0 \quad \text{و} \quad \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$$

- مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(A,1)$ و $(B,1)$ هو منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$، ومركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ هو مركز ثقل المثلّث ABC أو نقطة تلاقي متوسّطاته.
- يفيد مركز الأبعاد المتناسبة في إرجاع مجموع أشعّة لها المبدأ نفسه إلى شعاع واحد.
  - فإذا كان G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين (A,α) و (B,β)، كان

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$$

  - وإذا كان G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة (A,α) و (B,β) و (C,γ)، كان

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\left(\alpha+\beta+\gamma\right)\overrightarrow{MG}$$

- المستقيم (AB) هو مجموعة جميع مراكز الأبعاد المتناسبة M للنقطتين المثقَّلتين $\left(A,1-k\right)$ و (B,k)، عندما تتحوّل k في $\mathbb{R}$.
- لا يتغيّر مركز الأبعاد المتناسبة لنقاط مثقّلة إذا ضُربت جميع الثوابت بالعدد غير المعدوم نفسه.
- عند تعيين مركز الأبعاد المتناسبة لنقاط مثقّلة، يمكننا أن نستعيض عن عدد من النقاط بمركز الأبعاد المتناسبة لهذه النقاط وقد أسندنا إليه ثابتاً يساوي مجموع ثوابتها. وبوجه خاص، تفيد هذه الخاصّة التجميعيّة، في إرجاع تعيين مركز الأبعاد المتناسبة لعدد من النقاط المثقّلة إلى تعيين مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين.

منعكسات يجب امتلاكُها

- لإثبات أنّ G هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين (A,α) و (B,β)، فكّر في إثبات أنّ $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.
- وبالعكس، فكّر في التعبير عن مساواة شعاعيّة بالاستفادة من مفهوم مركز الأبعاد المتناسبة. فمثلاً، من المساواة $3\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ يمكننا أن نستنتج أنّ D هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(A,3)$ و $(B,-2)$ و $(C,1)$. (لأنّ $3-2+1\neq 0$).
- تُتيح كلُّ علاقة ارتباط خطّي من النمط $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$، أن نقول إنّ M هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقَّلتين $(A,1-k)$ و (B,k).
- لحساب نظيم مجموع أشعّة لها المبدأ نفسه، فكّر بالاستفادة من مركز الأبعاد المتناسبة. فمثلاً، إذا كان $\vec{u}=3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}$ كان $\|\vec{u}\|=\|-3\overrightarrow{MG}\|=3MG$ حيث G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(A,3)$ و $(B,-2)$ و $(C,-4)$.
- لإثبات وقوع ثلاث نقاط A و B و C على استقامة واحدة، فكّر بإثبات الارتباط الخطّي للشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ أو بإثبات أنّ إحدى هذه النقاط هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين الأخريين.
- يمكن إثبات تلاقي ثلاثة مستقيمات في نقطة واحدة، بإنشاء مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط بثلاث طرائق مختلفة.

أخطاءٌ يجبُ تجنُّبها

- إذا كان مجموع الثوابت معدوماً، لا يكون مركز الأبعاد المتناسبة موجوداً.

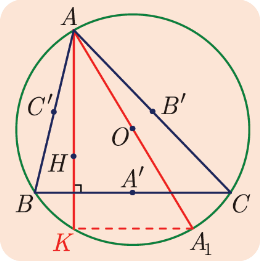
أنشطة

نشاط 1 الاثبات بالاستفادة من الأشعّة. مستقيم أويلر *Euler*

نتأمّل في هذا النشاط مثلّثاً ABC فيه O مركز الدائرة $\mathcal{C}$ المارّة برؤوسه، و G مركز ثقله، و A' و B' و C' هي بالترتيب منتصفات الأضلاع $[BC]$ و $[CA]$ و $[AB]$. يتضمّن هذا النشاط أربعة أجزاء.

❶ الخاصّة الشعاعيّة المميِّزة لنقطة تلاقي الارتفاعات

لنرمز بالرمز H إلى النقطة المعرّفة بالعلاقة (1) الآتية $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. الهدف من هذا الجزء هو إثبات أنّ النقطة H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلّث ABC.



① أثبت انطلاقاً من (1) أنّ $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$.

② أثبت أنّ (AH) عمودي على (BC).

③ أثبت أنّ (BH) عمودي على (AC). واستنتج المطلوب.

❷ مستقيم أويلر

① أثبت صحّة العلاقة (2) الآتية: $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

② a. أثبت أنّه إذا انطبقت نقطتان من بين النقاط O و G و H انطبقت الثالثة عليهما. واستنتج أنّه في هذه الحالة يكون المثلّث ABC متساوي الأضلاع.

b. وبالعكس، نفترض أنّ ABC متساوي الأضلاع. أثبت أنّ O و G و H منطبقة.

c. ماذا يمكننا القول عن النقاط O و G و H إذا لم يكن المثلّث متساوي الأضلاع.

إذا لم يكن المثلّث متساوي الأضلاع. أسمينا المستقيم المار بالنقاط O و G و H **مستقيم أويلر**.

❸ النظائر بالنسبة إلى منتصفات الأضلاع

الهدف من هذا الجزء أن نثبت أنّ نظائر النقطة H بالنسبة إلى منتصفات أضلاع المثلّث ABC تقع على الدائرة $\mathcal{C}$.

① لتكن A_1 النقطة المُقابلة قطرياً للنقطة A على الدائرة $\mathcal{C}$. ولنعرّف I منتصف القطعة المستقيمة $[HA_1]$.

a. علّل صحّة المساواتين $2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$.

b. استنتج أنّ $I = A'$ وأنّ A_1 هي نظيرة النقطة H بالنسبة إلى A'.

② عيِّن مُبَرِّراً، نظيرتَيْ H بالنسبة إلى كلٍّ من B' و C'، وأنجز البرهان.

④ النظائر بالنسبة إلى الأضلاع

الهدف من هذا الجزء أن نثبت أنّ نظائر H بالنسبة إلى أضلاع المثلّث ABC تقع على الدائرة $\mathcal{C}$.

① لهذا، نرمز بالرمز K إلى النقطة الثانية التي يتقاطع فيها المستقيم (AH) مع الدائرة $\mathcal{C}$. أثبت أنّ K هي نظيرة H بالنسبة إلى المستقيم (BC).

② عيّن بأسلوب مماثل، نظيرَيْ H بالنسبة إلى كلٍّ من (AC) و (AB)، وأنجز البرهان.

نشاط 2 إنشاء مركز الأبعاد المتناسبة لأربع نقاط

الهدف من هذا النشاط هو إنشاء مركز الأبعاد المتناسبة لأربع نقاط مثقّلة بطرائق مختلفة، وذلك بدراسة المثال الآتي. نتأمّل مضلّعاً رباعيّاً $ABCD$، ونرغب بإنشاء النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(A,2)$ و $(B,1)$ و $(C,-3)$ و $(D,1)$ والمعرّف بالعلاقة

$$2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$$

❶ الطريقة الأولى

① عبّر، في حالة نقطة M من المستوي، عن المقدار $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$.

② استنتج عبارة $\overrightarrow{GB}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$.

③ أنشئ إذن النقطة G.

❷ الطريقة الثانية

ليكن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$ و $(B,1)$، وليكن J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,-3)$ و $(D,1)$. عيّن النقطتين I و J، واستنتج أنّ $3\overrightarrow{GI}-2\overrightarrow{GJ}=\vec{0}$. ثُمّ أنشئ النقطة G.

❸ الطريقة الثالثة

ليكن K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2)$ و $(B,1)$ و $(D,1)$، وليكن L مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1)$ و $(D,1)$.

① علّل لماذا تكون K مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$ و $(L,2)$.

② أثبت أنّ G هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(K,4)$ و $(C,-3)$. ثُمّ أنشئ G.

تمرينات ومسائل

1 نتأمّل في مستوٍ مزوّد بمَعْلَم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ النقاط A و B و C المعيّنة بالعلاقات

$$\overrightarrow{OA}=4\vec{i}+2\vec{j}$$
$$\overrightarrow{OB}=\left(-2-\sqrt{3}\right)\vec{i}+\left(2\sqrt{3}-1\right)\vec{j}$$
$$\overrightarrow{OC}=\left(-2+\sqrt{3}\right)\vec{i}-\left(2\sqrt{3}+1\right)\vec{j}$$

① احسب نظيم كلٍّ من الأشعّة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BC}$.

② استنتج طبيعة المثلّث ABC.

2 A و B و C و D أربع نقاط في المستوي، I منتصف $[AD]$ و J منتصف $[BC]$.

① أثبت أنّ $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}$.

② عبّر عن $\overrightarrow{IJ}$ بطريقة أخرى واستنتج أنّ $2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$.

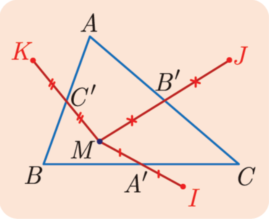
3 $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O. I منتصف $[AB]$ و J نقطة تُحقق $\overrightarrow{DJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

① علّل صحة المساواة $\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

② أثبت أنّ $\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BC}$.

③ أثبت أنّ النقاط O و I و J تقع على استقامة واحدة.

4 نتأمّل مثلّثاً ABC. النقاط A' و B' و C' هي منتصفات الأضلاع $[BC]$ و $[CA]$ و $[AB]$ بالترتيب. لتكن M نقطة ما، ولنعرّف I و J و K نظائر النقطة M بالنسبة إلى النقاط A' و B' و C'.



① أثبت أنّ $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AJ}$ و $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CI}$.

② أثبت أنّ المستقيمات (AI) و (BJ) و (CK) تتلاقى في نقطة واحدة، وعيّن موضع نقطة التلاقي هذه.

5 ليكن المثلّث ABC. وليكن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(A,2)$ و $(B,1)$، وليكن J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(B,1)$ و $(C,-2)$، وليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(A,2)$ و $(B,1)$ و $(C,-2)$.

① أثبت وقوع النقاط A و J و G على استقامة واحدة، وكذلك الأمر بالنسبة إلى النقاط C و I و G.

② استنتج أنّ G هي نقطة تقاطع مستقيمين يُطلب تعيينهما. وأنشئ النقطة G.

③ أثبت توازي المستقيمين (BG) و (AC).

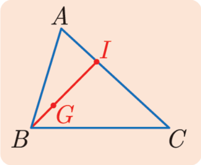
6 ليكن ABC مثلّثاً مركز ثقله G. نهدف في هذا التمرين إلى تعيين المجموعة Δ مجموعة النقاط M في المستوي التي يكون عندها الشّعاعان $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطّياً.

① أثبت أنّ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

② أثبت أنّ قولنا « M تنتمي إلى Δ» يُكافئ قولنا «الشّعاعان $\overrightarrow{MG}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيّاً».

③ استنتج المجموعة Δ وأنشئها.

7 ليكن المثلّث ABC. نعرّف النقطتين I و G بالعلاقتين:



$$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BI}$$

① أثبت أنّ I هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$ و $(C,1)$، واختزل المجموع $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}$.

② أثبت $2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GI}=\vec{0}$.

③ احسب المقدار $2\overrightarrow{GA}+6\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$ واستنتج أنّ G هو مركز أبعاد متناسبة للنقاط A و B و C بعد أن نسند إليها ثوابت يُطلب تعيينها.

لنتعلّم البحث معاً

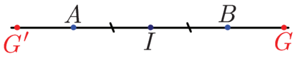
8 علاقات شعاعيّة، ومركز الأبعاد المتناسبة

لتكن القطعة المستقيمة $[AB]$. وليكن I منتصف $[AB]$. نتأمّل G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين (A,α) و (B,β)، ونتأمّل G' نظيرة G بالنسبة إلى I.

جد ثابتين α' و β' يجعلان G' مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين (A,α') و (B,β').

نحو الحلّ

فهم السؤال. لننشئ الشكل الموافق.



لمّا كانت المسألة تتعلّق بمركز الأبعاد المتناسبة، فلنكتب العلاقات الشعاعيّة التي تعبِّر عن ذلك.

أثبت صحّة العلاقات الآتية:

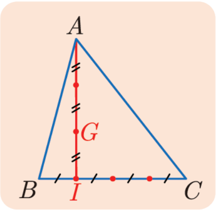
$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{IG}+\overrightarrow{IG'}=\vec{0}$$

بحثاً عن طريق. طريقة ممكنة لإيجاد الثابتين α' و β' تتمثّل في إثبات مساواة من الصيغة $\alpha'\overrightarrow{G'A}+\beta'\overrightarrow{G'B}=\vec{0}$، ولكن من السهل التعبير عن $\overrightarrow{GA}$ و $\overrightarrow{GB}$ بدلالة $\overrightarrow{G'A}$ و $\overrightarrow{G'B}$ ثمّ نستفيد من ذلك في العلاقة $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

1. علّل صحّة المساواتين $\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{G'B}$ و $\overrightarrow{GB}=-\overrightarrow{G'A}$.
2. استفد ممّا سبق للوصول إلى العلاقة المطلوبة. ماذا تستنتج؟

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

9 الثوابت التي يجب إسنادها إلى ثلاث نقاط كي تكون نقطة معطاة مركز الأبعاد المتناسبة لهذه النقاط المثقّلة.



تأمّل الشكل المجاور ثُمّ جد الأعداد α و β و γ التي تجعل G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة (A,α) و (B,β) و (C,γ).

نحو الحلّ

فهم السؤال. يذكّرنا الشكل بما نفعله عادة لإنشاء مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ). بالاستفادة من الخاصّة التجميعيّة، نستبدل بالنقطتين (B,β) و (C,γ) مركز أبعادهما المتناسبة I. عندئذ تكون G، على المستقيم (AI)، هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) و $(I,\beta+\gamma)$. أثبت أنّ I هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,3)$ و $(C,1)$.

✌ **بحثاً عن طريق**. إذن يمكن أن نختار $\beta = 3$ و $\gamma = 1$. بقي أن نعيّن α كي تكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,4)$ و (A,α) . أي كي يكون $4\overrightarrow{GI} + \alpha\overrightarrow{GA} = \vec{0}$.

1. استناداً إلى الشكل ما العلاقة التي تربط الشّعاعين $\overrightarrow{GI}$ و $\overrightarrow{GA}$.
2. استنتج قيمة α .

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

10 تحديد موضع نقطة

ABC مثلّث. النقطتان P و Q معيّنتان بالعلاقتين $\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CP}$ و $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AQ}$. والمستقيمان (BP) و(CQ) يتقاطعان في I . عيّن موضع R نقطة تقاطع (AI) و (BC) باستعمال مركز الأبعاد المتناسبة.

نحو الحلّ

✌ **فهم السؤال**. للإجابة عن السؤال المطروح، سنعبّر عن العلاقات الشعاعيّة الواردة في نصّ المسألة باستعمال مفهوم مركز الأبعاد المتناسبة.

1. ارسم الشكل الموافق لنصّ المسألة بدقّة.
2. أثبت أنّ P هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(A,1)$ و $(C,2)$ وأنّ Q هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(A,2)$ و $(B,1)$.

نهدف إلى تحديد موضع R على (BC) . الإجابة سهلة في حالة كون I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ) . لأنّه عندئذ تكون R مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B,β) و (C,γ) ، لماذا؟

✌ **بحثاً عن طريق**. لنفترض إذن أنّ I هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ) ، ولنستفد من المعلومات المتوفرة لدينا.

1. بيّن أنّ Q هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين (A,α) و (B,β) . استنتج أنّ $\alpha = 2\beta$.
2. بيّن أنّ P هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين (A,α) و (C,γ) . استنتج أنّ $\gamma = 2\alpha$.
3. بيّن أنّه يمكننا أن نختار $\alpha = 2$ و $\beta = 1$ و $\gamma = 4$ ، وتوثّق أنّه عندئذ تكون I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2)$ و $(B,1)$ و $(C,4)$.
4. حدّد موقع R على (BC) بإيجاد عدد حقيقي k يحقق $\overrightarrow{BR} = k\overrightarrow{BC}$.

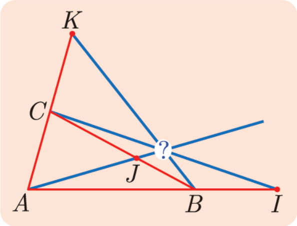
أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

11 مستقيمات متلاقية

ABC مثلّث. النقاط I و J و K معيّنة بالعلاقات $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

و $\overrightarrow{BJ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{AC}$.

أثبت تلاقي المستقيمات (AJ) و (BK) و (CI) في نقطة واحدة.



نحو الحلّ

فهم السؤال. نعلم أنّ الاستعمال المتكرّر للخاصّة التجميعيّة يفيد في إثبات تلاقي ثلاثة مستقيمات. لنعيّن ثلاثة ثوابت α و β و γ كي تمرّ المستقيمات (AJ) و (BK) و (CI) بالنقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ). لتحقيق ذلك يكفي أن يتحقّق ما يأتي:

- النقطة I هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) و (B,β).
- النقطة J هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B,β) و (C,γ).
- النقطة K هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) و (C,γ).

بحثاً عن طريق. علل ؟

1. I هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,-1)$ و $(B,3)$.
2. J هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,3)$ و $(C,2)$.
3. K هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,-1)$ و $(C,2)$.

لنرمز بالرمز G إلى مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$ و $(B,3)$ و $(C,2)$، أثبت، بالاستفادة من الخاصّة التجميعيّة، أنّ النقطة G تنتمي إلى المستقيمات الثلاثة (AJ) و (BK) و (CI).

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

12 البحث عن مجموعة نقاط

ABC مثلّث متساوي الساقين وقائم في A. جد Δ مجموعةُ النقاط M في المستوي التي تحقق العلاقة (1) الآتية $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=3\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$

نحو الحلّ

فهم السؤال. تضّم العلاقة (1) نظيم مجموع أشعّة من الشكل $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}$. وليس لدينا أيّة نتيجة تفيد في حساب نظيم مثل هذا المجموع. ولكن من الممكن اختزال هذه المجاميع بالاستفادة من مفهوم مركز الأبعاد المتناسبة. وسيفيدنا هذا الاختزال في حلّ المسألة.

✌ **بحثاً عن طريق.**

1. اختزل المجموع $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ باستعمال G مركز ثقل المثلّث ABC.
2. اختزل المجموع $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ باستعمال H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,-1)$ و $(C,-1)$.
3. أثبت أنّ « M ينتمي إلى Δ» يُكافئ « $MG = MH$»، واستنتج طبيعة المجموعة Δ.
4. مثّل المجموعة Δ بعد أن تنشئ النقطتين G و H.

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

13 نقاط على استقامة واحدة

ABC مثلّث. ليكن O منتصف الضلع $[BC]$، وليكن J منتصف الضلع $[AC]$، ولتكن I النقطة المعيّنة بالعلاقة $3\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}$، وأخيراً لتكن K النقطة المعيّنة بالعلاقة $3\overrightarrow{KI}=-2\overrightarrow{KJ}$.

أثبت وقوع A و O و K على استقامة واحدة باستعمال مركز الأبعاد المتناسبة.

نحو الحلّ

✌ **فهم السؤال.** لمّا كانت الاستفادة من مفهوم مركز الأبعاد المتناسبة في الحل مطلوبة. يمكننا البدء بالتعبير عن العلاقات الشعاعيّة في نص المسألة باستعمال هذا المفهوم. نريد إثبات وقوع A و O و K على استقامة واحدة. نلاحظ أنّ O هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1)$ و $(C,1)$، فإذا تمكنّا من إثبات أنّ K هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,β)، أمكننا إثبات المطلوب اعتماداً على الخاصّة التجميعيّة.

✌ **بحثاً عن طريق.** علل كلاً مما يأتي:

1. K هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,3)$ و $(J,2)$.
2. I هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$ و $(B,1)$.
3. J هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(C,1)$.
4. K هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(A,2)$ و $(B,1)$ و $(A,1)$ و $(C,1)$.
5. وقوع A و O و K على استقامة واحدة.

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

ليس هناك ما يمنع، عند تعريف مركز الأبعاد المتناسبة لنقاط، من وجود نقاط مكرّرة. فليس هناك ما يمنع من الحديث عن مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (A,α') و (B,β) و (C,γ) الذي يتّفق مع مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha+\alpha')$ و (B,β) و (C,γ). وهذا ما يتيح استخدامات مفيدة للخاصّة التجميعيّة كما في التمرين السابق.

قُدُماً إلى الأمام

14 ليكن المثلّث ABC، وليكن I منتصف $[AC]$، و J نظيرة B بالنسبة إلى C وأخيراً K النقطة المعرّفة بالعلاقة $\overrightarrow{AK} = \alpha\overrightarrow{AB}$. نهدف في هذا التمرين إلى تعيين قيمة α علماً أنّ النقاط I و J و K تقع على استقامة واحدة.

طريقة أولى : بالحساب الشعاعي

① اكتب $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

② استنتج قيمة α.

طريقة ثانية : باستعمال مَعْلَم، نختار المَعْلَم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

① احسب إحداثيات النقاط I و J و K في المَعْلَم السابق.

② استعمل شرط الارتباط الخطّي لشعاعين لتحسب قيمة α.

15 ليكن المثلّث ABC.

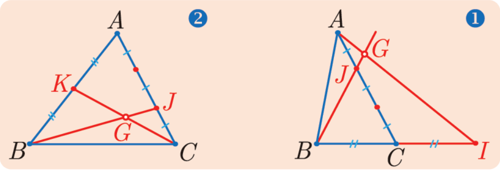
① نعرّف النقطة M بالعلاقة $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

❶ أثبت أنّ M تنتمي إلى المستقيم (BC).

❷ استنتج وجود عددين β و γ، يطلب تعيينهما، يجعلان M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B,β) و (C,γ).

② نعرّف النقطة N بالعلاقة $\overrightarrow{BN} = -\frac{5}{4}\overrightarrow{BC}$. عيّن الأعداد β و γ التي تجعل النقطة N مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B,β) و (C,γ) وتحقّق $\beta + \gamma = 1$.

16 تأمل الشكلين المجاورين، وعيّن -في حالة كلٍّ منهما- ثلاثة أعداد α و β و γ تجعل النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة (A,α) و (B,β) و (C,γ).



17 نتأمّل الرباعي $ABCD$ والنقاط I و J و K و L و M و N منتصفات القطع المستقيمة $[AB]$ و $[BC]$ و $[CD]$ و $[DA]$ و $[AC]$ و $[BD]$ بالترتيب. نهدف في هذا التمرين إلى إثبات أنّ للقطع المستقيمة $[IK]$ و $[JL]$ و $[MN]$ المنتصف نفسه.

① لتكن النقطة O منتصف $[IK]$. أثبت أنّ O هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط A و B و C و D وقد أسندنا إليها الثابت 1 نفسه.

② أثبت أنّ O هي منتصف $[JL]$ ومنتصف $[MN]$ أيضاً.

18 نتأمّل مثلّثين ABC و $A'B'C'$. ليكن G مركز ثقل ABC و G' مركز ثقل $A'B'C'$.

① أثبت أنّ $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}$.

② استنتج شرطاً لازماً وكافياً كي يكون للمثلّثين مركز الثقل نفسه.

③ **تطبيق** : ليكن المثلّث ABC و k عدد حقيقي لا يساوي 0. ولتكن A' و B' و C' النقاط المعرّفة بالعلاقات $\overrightarrow{BA'}=k\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CB'}=k\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{AC'}=k\overrightarrow{AB}$.

❶ أثبت أنّ للمثلّثين ABC و $A'B'C'$ مركز الثقل نفسه.

❷ ارسم الشكل الموافق في حالة $k=\frac{1}{2}$.

19 نتأمّل مثلّثاً ABC والنقطتين M و N المعرّفتين بالعلاقتين $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BN}=k\overrightarrow{BC}$ حيث k عددٌ حقيقي مختلف عن 0 و 1. ليكن I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[BC]$ و G منتصف $[MN]$. نهدف إلى إثبات وقوع النقاط G و I و J على استقامة واحدة.

① اكتب النقطة M مركز أبعاد متناسبة للنقطتين A و B.

② اكتب النقطة N مركز أبعاد متناسبة للنقطتين B و C.

③ أثبت أنّ G هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(A,1-k)$ و (B,k) و $(B,1-k)$ و (C,k).

④ استنتج أنّ G هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(I,1-k)$ و (J,k). واستنتج المطلوب.

20 ليكن ABC مثلّثاً متساوي الساقين وقائماً في A، فيه $AB=4\,\text{cm}$. نهدف في هذا التمرين إلى تعيين $\mathcal{C}$ مجموعة النقاط M في المستوي التي تحقق $\left\|-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=4$

① استفد من النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$ و $(B,1)$ و $(C,2)$ لتختزل المجموع $-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$.

② أثبت أنّ « M تنتمي إلى $\mathcal{C}$» يُكافئ «$MG=2$»، ثمّ استنتج طبيعة المجموعة $\mathcal{C}$.

③ أنشئ النقطة G ثمّ المجموعة $\mathcal{C}$.

21 ليكن ABC مثلّثاً قائم الزاوية في A. ليكن I منتصف $[BC]$، ولتكن $\mathcal{C}$ الدائرة التي مركزها A وتمر بالنقطة I. وأخيراً لتكن G النقطة من $\mathcal{C}$ التي تقابل I قطرياً.

① أثبت أنّ G هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,4)$ و $(B,-1)$ و $(C,-1)$.

② عيّن عددين حقيقيين β و γ يجعلان النقطة A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(G,2)$ و (B,β) و (C,γ).

③ عيّن مجموعة نقاط المستوي M التي تحقّق $\left\|2\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$.

2

الزوايا الموجّهة والإحداثيّات القطبيّة

1. الزوايا الموجّهة
2. خواص الزوايا الموجّهة
3. النسب المثلّثيّة
4. الإحداثيّات القطبيّة

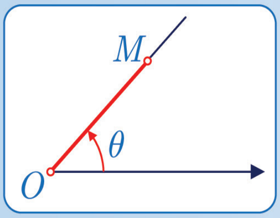
إذا سألتَ أصدقائك عن القرى أو المدن التي جاؤوا منها فكثيراً ما تحصل على إجابات نموذجية مثل :

- إنّها تقع على مسافة ثلاثين كيلومتراً شمال شرق مدينة حلب.
- إنّها تبعد عن حمص مسافة خمسة عشر كيلومتراً جنوباً.
- ....

ولكن من النادر جداً أن تتلقى جواباً من النمط

- إنّها تقع على خط العرض $33°\ 30'\ 47''$ شمالاً وخط الطول $36°\ 17'\ 42''$ شرقاً!

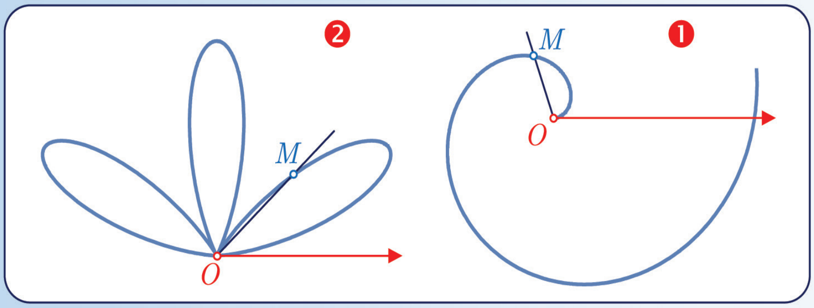
فإذا أردنا إرشاد أحد إلى مكانٍ نختارُ عادةً نقطةً مرجعيةً يعرفها (القطب)، ثُمَّ نعيّنُ له، انطلاقاً من هذه النقطة، الاتجاه الذي عليه أن يأخذه عن طريق تحديد (الزاوية) مع الشمال أو الشرق، وأخيراً نحدِّدُ له (المسافة) التي عليه أن يقطعها في ذلك الاتجاه.



هذا مثال عن الإحداثيات القطبية، التي تفيد في تحديد موقع أية نقطة M في المستوي انطلاقاً من نقطة مرجعية O نسميها القطب، وزاوية θ يصنعها نصف المستقيم $[OM)$ مع نصف مستقيم ثابت يسمى المحور القطبي، والمسافة OM.

أمّا استعمال خطوط العرض وخطوط الطول فهو بمثابة استعمال الإحداثيّات الدّيكارتيّة. ألا ترون أنّ الإحداثيّات القطبيّة أقرب إلى الحدس من الإحداثيّات الدّيكارتيّة؟

في الشكل ❶ نجد الخطّ المسمّى حلزون أرخميدس الذي ترسمه النقطة M عندما يكون بُعدها عن المبدأ متناسباً مع قياس الزاوية θ، وفي الشكل ❷ نجد الخطّ الذي ترسمه النقطة M عندما يكون بُعدها عن المبدأ متناسباً مع $\sin^2(3\theta)$.

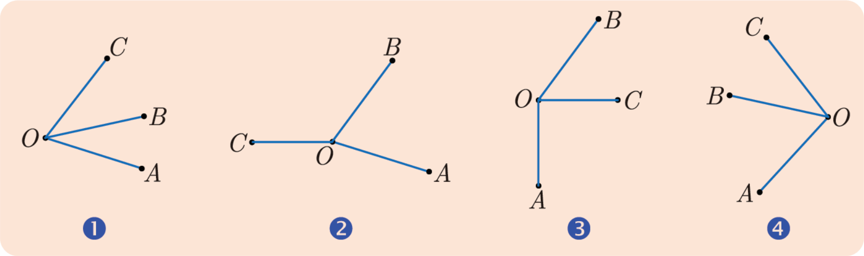


2

الزوايا الموجّهة والإحداثيّات القطبيّة

انطلاقة نشطة

لا توجد علاقة من نمط علاقة شال تربط الزوايا الهندسيّة. فإذا تأمّلنا زاويتين هندسيّتين $\widehat{AOB}$ و $\widehat{BOC}$ فمن الخطأ بوجه عام أن نكتبَ $\widehat{AOB}+\widehat{BOC}=\widehat{AOC}$. يكفي لنرى ذلك أن نتأمّل الحالات المختلفة الآتية. فالمساواة $\widehat{AOB}+\widehat{BOC}=\widehat{AOC}$ ليست صحيحة إلاّ في حالة الشكلين ❶ و ❹.



ومع ذلك نلاحظ أنّه إذا دار نصف المستقيم $[OA)$ لينطبق على نصف المستقيم $[OB)$، ثُمّ دار نصف المستقيم $[OB)$ لينطبق على نصف المستقيم $[OC)$، فإنّ ذلك يؤول في جميع الحالات إلى دوران نصف المستقيم $[OA)$ لينطبق على نصف المستقيم $[OC)$ وذلك مهما كانت جهة الدوران أو عدد الدورات التي نجريها.

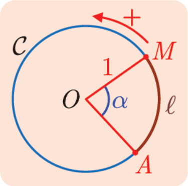
وهكذا، فإنّنا سنقرن بالأزواج $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ و $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$ و $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})$ قياسات α و β و γ على التوالي، تُحقّق $\alpha+\beta=\gamma$. وهذا ما سنكتبه

$$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})=(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})$$

وهذه العلاقة ستكون صحيحة في جميع الحالات.

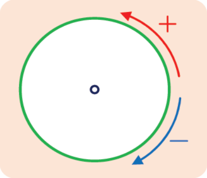
تذكرة

- الدائرة المثلّثية هي دائرة نصف قطرها 1 موجّهة بالاتجاه المبيّن في الشكل المجاور (الاتجاه الموجب، أو المباشر)، ومحيطها يساوي 2π.
- طول قوسٍ من دائرة نصف قطرها R، محصور بزاوية مركزيّة $\widehat{AOM}$ قياسها α راديان، يساوي $\ell=R\alpha$. وعليه، في حالة الدائرة المثلّثيّة، إذا كان قياس $\widehat{AOM}$ مساوياً α كان طول القوس الموافق مساوياً $\ell=\alpha$.



1 الزوايا الموجهة

1.1. توجيه المستوي

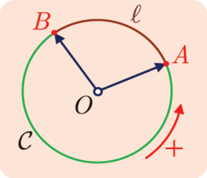


هناك اتّجاهان لحركة نقطة على دائرة. نصطلح أن نسمّي أحدهما، وهو المبيّن بالسهم الأحمر، اتّجاهاً مباشراً، أو موجباً وهو نفسه لجميع الدوائر في المستوي، ونسمّي الآخر الاتجاه السالب أو غير المباشر أو الرّجعيّ.

في هذه الحالة نقول إنّ المستوي موجّه. وهذا ما سنفترضه في بقيّة هذه الوحدة.

2.1. الزوايا الموجّهة وقياسها

1. القياسات الموجبة



▪ لتكن $\mathcal{C}$ دائرة مثلّثيّة مركزها O، ولتكن A و B نقطتين منها. عندما ندوِّر الشعاع $\overrightarrow{OA}$ بالاتجاه المباشر لينطبق على $\overrightarrow{OB}$ تتحوّل النقطة A على قوس طوله ℓ من الدائرة $\mathcal{C}$. نصطلح أن نقول ℓ هو قياس الزاوية الموجّهة $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$، ونكتب $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\ell$. نبدأ بالشعاع $\overrightarrow{OA}$ دلالة على أنّنا ننطلق من النقطة A باتّجاه النقطة B. وبالطبع، في حالة $O\leqslant \ell \leqslant \pi$ يكون ℓ قياساً للزاوية $\widehat{AOB}$ أيضاً.

مثال عيِّن على $\mathcal{C}$ أربع نقاط K و L و M و N تحقّق الشروط المعطاة في الحالتين الآتيتين:

① $(\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OL})=\dfrac{\pi}{4}$ و $(\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OM})=\dfrac{\pi}{2}$ و $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON})=\dfrac{2\pi}{3}$.

② $(\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OL})=\dfrac{7\pi}{6}$ و $(\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OM})=\dfrac{3\pi}{2}$ و $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON})=\dfrac{5\pi}{3}$.

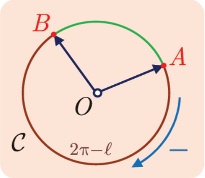
▪ بعد أن يدور الشعاع $\overrightarrow{OA}$ بالاتّجاه المباشر لينطبق على الشعاع $\overrightarrow{OB}$ للمرّة الأولى، يمكنه أن يتابع الدوران بالاتجاه الموجب دورة إضافيّة. فتقطع النقطة A قوساً طولها $\ell+2\pi$. عندئذ نقول $\ell+2\pi$ قياسٌ للزاوية الموجّهة $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$، ونكتب $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\ell+2\pi$.

وهكذا بعد الوصول إلى B يمكن للنقطة A أن تتابع الدوران بالاتّجاه المباشر فتدور k دورةً إضافيّة. فيكون طول القوس الذي قطعته A مساوياً $\ell+k\times 2\pi$ وهذا العدد هو أيضاً قياسٌ للزاوية الموجّهة $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.

مثال عيِّن على $\mathcal{C}$ أربع نقاط K و L و M و N تحقق الشروط الآتية:

$(\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OL}) = \frac{\pi}{3}+2\pi$ و $(\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OM}) = \frac{5\pi}{6}+4\pi$ و $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}) = \frac{27\pi}{4}$.

2. القياسات السالبة



يمكن أيضاً أن يدور الشعاع $\overrightarrow{OA}$ بالاتّجاه غير المباشر، عندئذ تصل النقطة A إلى B بعد أن تقطع قوساً طوله $2\pi-\ell$. لتمييز الاتّجاه غير المباشر للدوران نصطلح احتسابه سالباً، فنقول إنّ قياساً للزاوية الموجّهة $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ هو $-(2\pi-\ell)$، أي $\ell-2\pi$. ويمكننا أيضاً إجراء k' دورة إضافيّة بالاتّجاه غير المباشر فنجد $\ell-2(k'+1)\pi$ هو أيضاً قياسٌ للزاوية الموجّهة $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.

مثال عيِّن على $\mathcal{C}$ أربع نقاط K و L و M و N تحقق الشروط الآتية:

$(\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OL}) = \frac{5\pi}{3}-2\pi$ و $(\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OM}) = \frac{7\pi}{6}-4\pi$ و $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}) = -\frac{23\pi}{4}$.

3. مجموعات القياسات

لقد رأينا أنّ القياسات الموجبة للزاوية الموجّهة $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ هي $\ell+2k\pi$ والقياسات السالبة هي $\ell-2(k'+1)\pi$. فإذا رمزنا بالرمز k أيضاً إلى المقدار $-(k'+1)$ أخذ المقدار $\ell-2(k'+1)\pi$ الصيغة $\ell+2k\pi$ حيث $k<0$.

إذن، كلُّ قياس للزاوية الموجّهة $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ هو من الصيغة $\ell+2k\pi$ حيث k عدد صحيح من $\mathbb{Z}$.

مثال تُحقِّق النقطة P على $\mathcal{C}$ الشرط $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP}) = \frac{3\pi}{4}$ عيِّن فيما يأتي القياسات الموافقة لهذه الزاوية: $-\frac{5\pi}{4}$ ، $\frac{11\pi}{4}$ ، $-\frac{11\pi}{4}$ ، $\frac{13\pi}{4}$ ، $\frac{27\pi}{4}$ ، $\frac{2015\pi}{4}$.

فَكِّرْ

إذا كان x و y قياسين للزاوية $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$، كان $x-y$ مضاعفاً للعدد 2π. وعليه تكفي معرفة قياسٍ واحدٍ للزاوية $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ كي نعرف جميع القياسات الأخرى لهذه الزاوية.

نتيجة

① يكفي لتعيين نقطة M على الدائرة المثلّثية $\mathcal{C}$ ما يأتي:

❶ تحديد نقطة A على $\mathcal{C}$ تسمّى المبدأ.

❷ معرفة قياسٍ للزاوية الموجّهة $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$.

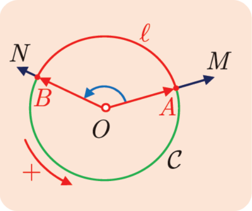
② أيّاً كان العدد الحقيقي x، فتوجد نقطة وحيدة M على $\mathcal{C}$ تُحقّق $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}) = x$، في الحقيقة، إذا أُعطينا العدد x، ناقشنا حالتين:

- في حالة $0 \leq x$، نقطع على $\mathcal{C}$، بدءاً من النقطة A، قوساً هندسيّة طولها x بالاتجاه المباشر أو الموجب.
- وفي حالة $0 > x$، نقطع على $\mathcal{C}$، بدءاً من النقطة A، قوساً هندسيّة طولها $|x|$ بالاتجاه غير المباشر أو السالب.

والنقطة التي نصل إليها عندئذ هي النقطة M التي تُحقِّق $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}) = x$.

3.1. الزاوية الموجّهة لشعاعين غير معدومين

1. تعريف قياسات الزاوية



ليكن $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$ شعاعين غير معدومين، مُمثَّلَيْن انطلاقاً من مبدأ مشترك O. يقطع نصفا المستقيمين $[OM)$ و $[ON)$ الدائرة المثلّثيّة $\mathcal{C}$ التي مركزها O بالنقطتين A و B بالترتيب. لنقرن بالزوج $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ مجموعة الأعداد $\ell + 2k\pi$ حيث k عددٌ صحيح، و $\ell \geq 0$ هو طول القوس $\overset{\frown}{AB}$ من الدائرة $\mathcal{C}$ مُقاساً بالاتجاه المباشر من A إلى B.

تعريفاً، إنّ أيّ واحدٍ من الأعداد $\ell + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ هو قياسٌ بالراديان للزاوية الموجّهة $(\vec{u},\vec{v})$ للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

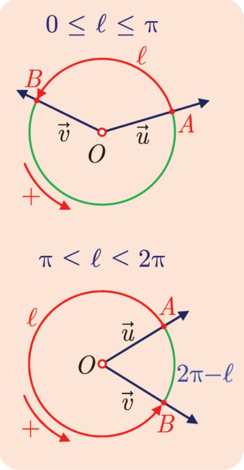
▫ لقد جرت العادة أن نرمز بالرمز $(\vec{u},\vec{v})$ إلى زاوية شعاعين بدلاً من $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$، كما جرت العادة ألاّ نميِّز بين زاوية وأحد قياساتها. فنكتب $(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\pi}{3}$ أو $(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\pi}{3}[\mathrm{mod}\, 2\pi]$.

▫ إذا كان x قياساً لزاوية شعاعين كُتِبَ كلُّ قياس آخر للزاوية نفسها بالشكل

$$y = x + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

في الحقيقة نعلم أنه يوجد عددان صحيحان k_1 و k_2 بحيث، $x = \ell + 2k_1\pi$ و $y = \ell + 2k_2\pi$ إذن $y - x = 2(k_2 - k_1)\pi$ ومنه $y = x + 2k\pi$ وقد عرّفنا $k = k_2 - k_1$.

2. القياس الأساسيّ



يوجد، بين جميع القياسات $\ell + 2k\pi$ لزاوية شعاعين $(\vec{u},\vec{v})$، قياسٌ وقياسٌ واحدٌ فقط ينتمي إلى المجال $I =]-\pi,\pi]$. نسمّي هذا القياس القياس الأساسيّ للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$.

القيمة المطلقة للقياس الأساسيّ للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$ تساوي قياس الزاوية الهندسيّة المكوّنة بالشّعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مُقاسة بالراديان.

في الحقيقة، إذا تأمّلنا الشكل المجاور وجدنا أنّ القياس الأساسيّ يساوي ℓ في حالة $0 \leq \ell \leq \pi$، ويساوي $\ell - 2\pi$ في حالة $\pi < \ell < 2\pi$ لأنّه في هذه الحالة يكون $-\pi < \ell - 2\pi < 0$.

ونلاحظ من جهة أخرى، أنّه في حالة $0 \leq \ell \leq \pi$، يكون قياس الزاوية الهندسيّة $\widehat{AOB}$ مساوياً ℓ وهو القياس الأساسيّ للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$. أمّا في حالة $\pi < \ell < 2\pi$، فيكون قياس الزاوية الهندسيّة $\widehat{AOB}$ مساوياً $2\pi - \ell$. ولكن $2\pi - \ell = |\ell - 2\pi|$ و $\ell - 2\pi$ هو القياس الأساسيّ للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$.

3. الدوران والزوايا الموجّهة

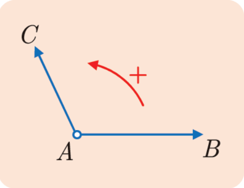
تعريف 1

نُعطى نقطة O في المستوي وعدداً حقيقيّاً α. نعرّف الدوران الذي مركزه O وزاويته α (مُقاسة بالراديان)، بأنّه التحويل $R_{O,\alpha}$ في المستوي الموجّه الذي يُبقي النقطة O ثابتة، ويقرن بكلّ نقطة M، غير O، النقطة M' التي تُحقّق

$$OM = OM' \quad \text{و} \quad (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}) = \alpha.$$

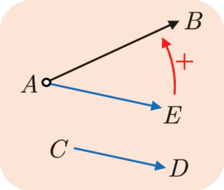
تكريساً للفهم

كيف نجد قياس $(\vec{u},\vec{v})$ انطلاقاً من الزاوية الهندسيّة ؟



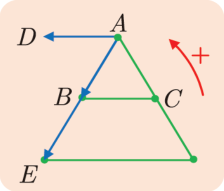
- يؤلّف الشّعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ زاوية هندسيّة $\widehat{BAC}$، ونعلم أنّ $\widehat{BAC} = \alpha$. لتعيين $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ نلاحظ أولاً أنّ $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ يساوي α أو $-\alpha$. ولكن في الحالة المبيّنة في الشكل المجاور، كي ينطبق نصف المستقيم $[AB)$ على نصف المستقيم $[AC)$ بعد دورانٍ زاويته α يجب الدوران بالاتّجاه المباشر أو الموجب. إذن $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \alpha$ ونجد بأسلوب مماثل أنّ $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}) = -\alpha$.

▪ في الحالة التي لا يكون فيها للشعاعين المبدأ نفسه، مثلاً $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$. نُرجع هذه الحالة إلى الحالة السابقة بأن نرسم مثلاً شعاعاً $\overrightarrow{AE}$ له منحى وجهة الشعاع $\overrightarrow{CD}$، وعندها يكون لدينا $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE})$.



مثال لنتأمّل مثلّثاً متساوي الأضلاع ABC.

▫ عندئذ، استناداً إلى الفقرة الأولى يكون لدينا $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = +\frac{\pi}{3}$ و $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{3}$.



▫ لحساب $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AB})$ نرسم الشعاع $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$، عندئذ يكون لدينا $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE})$، ولكن من الواضح أنّ $\widehat{EBC} = \frac{2\pi}{3}$، إذن استناداً إلى التوجيه واعتماداً على الفقرة الأولى نستنتج أنّ $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE}) = -\frac{2\pi}{3}$.

▫ لحساب $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB})$ نرسم الشعاع $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$، عندئذ يكون لدينا $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = -\frac{\pi}{3}$.

مثال كيف نعيّن القياس الأساسيّ لزاوية موجّهة ؟

تُحقّق الزاوية الموجّهة لشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ المساواة $(\vec{u},\vec{v}) = 2016\,\text{rad}$، عيّن قياسها الأساسيّ.

إذا كانت θ هي القياس الأساسيّ فهذا يعني وجود عدد صحيح k يُحقّق $\theta = 2016 + 2k\pi$ يكفي إذن أن نحسب k انطلاقاً من المتراجحة $-\pi < 2016 + 2k\pi \le \pi$.

الحل

لحلّ هذه المتراجحة نلاحظ أنّها تُكافئ $-\pi - 2016 < 2k\pi \le \pi - 2016$ ومن ثَمّ

$$\frac{-\pi - 2016}{2\pi} < k \le \frac{\pi - 2016}{2\pi}$$

ولكن

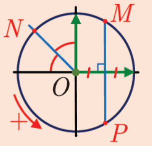
$$\frac{-\pi - 2016}{2\pi} = -321.356365\ldots \quad \text{و} \quad \frac{\pi - 2016}{2\pi} = -320.356365\ldots$$

إذن $k = -321$، وعليه $\theta = 2016 - 321 \times 2\pi$ أو $\theta \approx -0.9\,\text{rad}$.

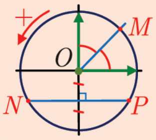
تَدرَّبْ

نتأمّل في المستوي معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j})$ ولنفترض أنّ $(\vec{i},\vec{j})=+\frac{\pi}{2}$. لتكن $\mathcal{C}$ الدائرة المثلّثيّة التي مركزها O، و A و B النقطتان المعرّفتان بالعلاقتين $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{OB}=\vec{j}$. تتعيّن نقطة M من $\mathcal{C}$ بقياسٍ للزاوية $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$.

① عيِّن على $\mathcal{C}$ النقاط M و N و P و Q و R المعيَّنة بالزوايا $\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{5\pi}{6}$ و $\frac{11\pi}{4}$ و $\frac{7\pi}{2}$ و $\frac{17\pi}{3}$ بالترتيب.



② استفد من معلومات الشكل المجاور لتعطي قياسات من المجال $[0,2\pi[$ تعيِّن النقاط M و N و P.



③ استفد من معلومات الشكل المجاور لتعطي قياسات من المجال $]-\pi,\pi]$ تعيِّن النقاط M و N و P.

④ ارسم الدائرة المثلّثيّة $\mathcal{C}$ ولوِّن عليها القوس الذي تقطعه النقطة M عندما يتحوّل x، قياسُ الزاوية $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$، في كلٍّ من المجالات الآتية:

❶ $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$ ❷ $\left[\frac{4\pi}{3},\frac{13\pi}{6}\right]$ ❸ $\left[-\frac{7\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$

⑤ عيّن، في كلٍّ من الحالات الآتية، القياس الأساسيّ للزاوية الموجهّة α:

❶ $\alpha=\frac{7\pi}{2}$ ❷ $\alpha=-\frac{4\pi}{3}$ ❸ $\alpha=\frac{35\pi}{6}$

❹ $\alpha=-\frac{21\pi}{4}$ ❺ $\alpha=-\frac{202\pi}{3}$ ❻ $\alpha=-18$

2 خواص الزوايا الموجهة

1.2. الزوايا والارتباط الخطّي

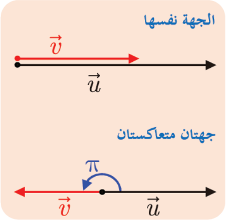
ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين غير معدومين. تفيدنا الزاوية الموجّهة $(\vec{u},\vec{v})$ في ترجمة الارتباط الخطّي لهذين الشعاعين. إذ استناداً إلى التعريف لدينا

$$(\vec{u},\vec{u}) = 0 \quad \text{و} \quad (-\vec{u},\vec{u}) = (\vec{u},-\vec{u}) = \pi$$

ومنه المبرهنة البسيطة الآتية.

مُبرهَنة 1

- القول إنّ الشعاعين غير المعدومين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطّياً ولهما الجهة نفسها يُكافئ قولنا إنّ $(\vec{u},\vec{v}) = 0$.
- والقول إنّ الشعاعين غير المعدومين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطّياً ومتعاكسان بالجهة يُكافئ قولنا إنّ $(\vec{u},\vec{v}) = \pi$.



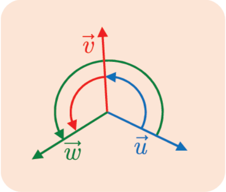
2.2. علاقة شال

نقبل دون برهان صحّة المبرهنة الآتية التي تسمّى علاقة شال.

مُبرهَنة 2

أيّاً كانت الأشعّة غير المعدومة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ كان

$$(\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u},\vec{w})$$



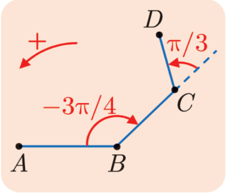
☜ عملاً بعلاقة شال، يكون ناتج جمع أي قياس للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$ مع أي قياس للزاوية $(\vec{v},\vec{w})$ قياساً للزاوية $(\vec{u},\vec{w})$، وبالعكس كلُّ قياس للزاوية $(\vec{u},\vec{w})$ هو ناتج جمع قياس للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$ وقياس للزاوية $(\vec{v},\vec{w})$.

مثال في الشكل المجاور

$$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD})$$

إذن

$$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}) = -\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{12}$$



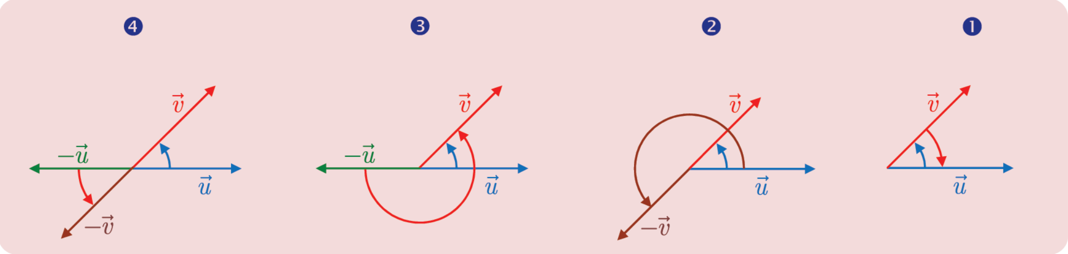
نتائج

أيّاً كان الشّعاعان غير المعدومين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ تحقَّقت الخواصّ الآتية :

① $(\vec{v},\vec{u}) = -(\vec{u},\vec{v})$ ② $(\vec{u},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) + \pi$

③ $(-\vec{u},\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) + \pi$ ④ $(-\vec{u},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v})$

توضّح الأشكال الآتية الخواص السابقة وتفيد في استرجاعها وتذكّرها.



الإثبات

- نعلم أنّ $(\vec{u},\vec{u}) = 0$، إذن استناداً إلى علاقة شال $(\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},\vec{u}) = (\vec{u},\vec{u}) = 0$، وعليه $(\vec{v},\vec{u}) = -(\vec{u},\vec{v})$ وهي العلاقة ①.
- لمّا كان $(\vec{v},-\vec{v}) = \pi$، استنتجنا العلاقة ② بالاستفادة من علاقة شال كما يأتي

$$(\vec{u},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) + \pi$$

- وكذلك لمّا كان $(\vec{u},-\vec{u}) = \pi$، استنتجنا العلاقة ③ بالاستفادة من علاقة شال كما يأتي

$$(-\vec{u},\vec{v}) = (-\vec{u},\vec{u}) + (\vec{u},\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) + \pi$$

- نلاحظ أنّ $(\vec{u},-\vec{u}) = -\pi$ أيضاً لأنّه إذا كان π قياساً لزاوية كانت جميع الأعداد $\pi + 2k\pi$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$) قياسات للزاوية نفسها، فيكفي أن نأخذ $k = -1$ كي نجد أنّ $-\pi$ هو أيضاً قياس للزاوية $(\vec{u},-\vec{u})$. فإذا استفدنا من علاقة شال استنتجنا ④ :

$$(\vec{u},\vec{v}) = (\vec{u},-\vec{u}) + (-\vec{u},-\vec{v}) + (-\vec{v},\vec{v}) = -\pi + (-\vec{u},-\vec{v}) + \pi$$

تكريساً للفهم

كيف تؤثّر التحويلات المألوفة على الزوايا الموجّهة؟

نعلم أنّ الانسحابات، والدورانات والانعكاسات تحافظ على الزوايا الهندسيّة، أي يكون للزاوية الهندسيّة ولصورتها القياس نفسه.

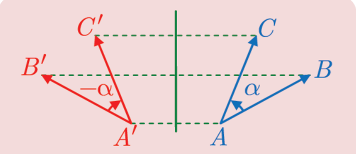
أمّا في حالة الزوايا الموجّهة فتتحقّق الخواصّ الآتية:

- الانسحابات والدورانات تحافظ على قياس الزوايا الموجّهة:

الانسحاب يحافظ على الزوايا الموجهة

الدوران يحافظ على الزوايا الموجهة

- الانعكاسات تغيِّر قياس الزاوية الموجّهة إلى عكسه:

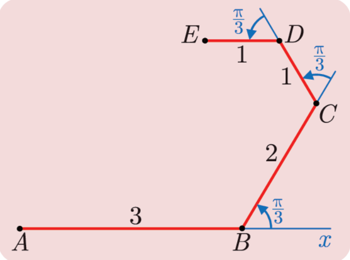


الانعكاس يعكس الزوايا الموجهة

ما فائدة المبرهنة 1 ؟

- تفيد في إثبات توازي المستقيمين (AB) و (CD) بإثبات أنّ قياس $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})$ يساوي 0 أو π.
- تفيد في إثبات وقوع ثلاث نقاط A و B و C على استقامة واحدة بإثبات أنّ $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ يساوي 0 أو π.

مثال كيف نثبت توازي مستقيمين؟



ننشئ خطّاً مضلّعيّاً منكسراً $ABCDE$ كما في الشكل المجاور.

① أعطِ قياساً لكلٍّ من $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})$ و $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD})$ و $(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DE})$.

② احسب قياس الزاوية $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE})$، واستنتج توازي المستقيمين (AB) و (DE)، ثُمّ أثبت أنّ $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{DE}$.

الحل

① الزاوية الهندسيّة التي يكوّنها الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ هي الزاوية $\widehat{CBx}$ وتساوي $\frac{\pi}{3}$.

إذن $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})=+\frac{\pi}{3}$. وكذلك نجد أنّ $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD})=+\frac{\pi}{3}$ و $(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DE})=+\frac{\pi}{3}$.

② لحساب $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE})$ نستفيد من علاقة شال، فنكتب

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE})=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD})+(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DE})$$

إذن $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE})=\pi$.

تثبت المساواة السابقة أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DE}$ مرتبطان خطيّاً، ومن ثَمّ أنّ المستقيمين (AB) و (DE) متوازيان. إضافة إلى ذلك، يوجد عددٌ k يُحقِّق الشرطين $k<0$ و $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{DE}$. وبالعودة إلى أطوال القطع المستقيمة المبيّنة في الشكل نستنتج أنّ $k=-3$.

تدرّبْ

① أنشئ خطّاً مضلّعيّاً منكسراً $ABCDE$ مُحقّقاً الشروط الآتية: $AB = 4$ و $BC = 3$ و $CD = 2$ و $DE = 2$ (بالسنتيمترات)، بالإضافة إلى الشروط الآتية:

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{5\pi}{6} \text{ و } (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = -\frac{\pi}{2} \text{ و } (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}) = \frac{\pi}{3}$$

❶ علّل صحّة المساواة

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE})$$

❷ استنتج قياساً للزاوية $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE})$.

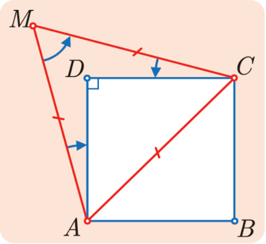
❸ علّل ارتباط الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DE}$ خطّياً، واستنتج عدداً k يُحقّق $\overrightarrow{DE} = k\overrightarrow{AB}$.

② نعطي نقطتين مختلفتين A و B في مستوٍ موجّه، عيِّن النقطة C التي تحقّق الشرطين المبيَّنيْن أدناه، واحسب القياس الأساسيّ للزاوية الموجّهة $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ في الحالتين الآتيتين :

❶ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$ و $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{6}$

❷ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{3}$ و $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2}$.

③ في الشكل المجاور، $ABCD$ مربّعٌ و MAC مثلّثٌ متساوي الأضلاع.



❶ أعطِ قياساً لكل من الزوايا الموجهة $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC})$ و $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AM})$ و $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CD})$ و $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$.

❷ ما مجموع هذه القياسات؟

④ $ABCD$ متوازي أضلاع فيه $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \alpha$.

❶ احسب بدلالة α الزوايا الموجهة $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ و $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB})$ و $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC})$.

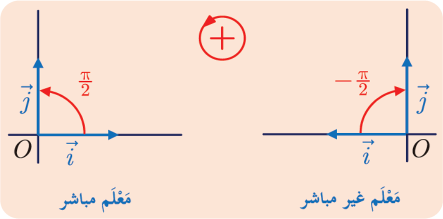
❷ ليكن O مركز متوازي الأضلاع، استنتج النتائج السابقة بالاستفادة من التناظر المركزي الذي مركزه O. (لاحظ أنّ التناظر S_O هو أيضاً الدوران $\mathcal{R}_{O,\pi}$).

3 النسب المثلّثية

1.3. المعلم المتجانس المباشر

تعريف 2

نقول إنّ المَعْلَم المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ في المستوي مَعْلَمٌ **مباشرٌ** في حالة $(\vec{i},\vec{j})=\frac{\pi}{2}$. ونقول إنّه **غير مباشر** أو **رجعيّ** في حالة $(\vec{i},\vec{j})=-\frac{\pi}{2}$.

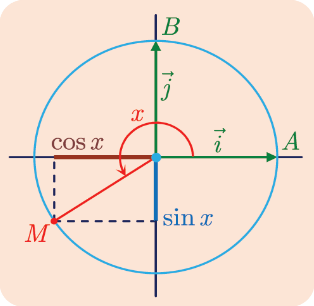


2.3. جيب وجيب تمام زاوية شعاعين

① تذكرة : جيب وجيب تمام عدد حقيقي x.

لتكن $\mathcal{C}$ دائرة مثلّثيّة مركزها O. ولتكن A و B نقطتين من $\mathcal{C}$ تجعلان $(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ معلماً متجانساً مباشراً. ولنضع $\vec{i}=\overrightarrow{OA}$ و $\vec{j}=\overrightarrow{OB}$.

نقرن بكلِّ عددٍ حقيقي x النقطة الوحيدة M من $\mathcal{C}$ التي تجعل من x قياساً للزاوية $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$. إنّ $\cos x$ هو تعريفاً فاصلة النقطة M في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$، و $\sin x$ هو بالتعريف ترتيب النقطة M في المعلم نفسه.



② جيب وجيب تمام زاوية موجّهة لشعاعين $(\vec{u},\vec{v})$.

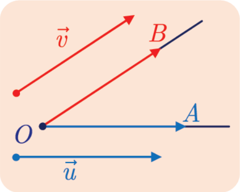
ليكن x قياساً ما (بالراديان) لزاوية موجّهة $(\vec{u},\vec{v})$، عندئذ يأخذ كلُّ قياس آخر لهذه الزاوية الصيغة $x+2k\pi$ و k عددٌ صحيح. وفي هذه الحالة يقترن كلا العددين x و $x+2k\pi$ بالنقطة M نفسها على الدائرة المثلّثيّة. وبناءً على ذلك يكون $\cos\left(x+2k\pi\right)=\cos x$ و $\sin\left(x+2k\pi\right)=\sin x$.

ومنه التعريف الآتي:

تعريف 3

إنّ جيب الزاوية الموجّهة $(\vec{u},\vec{v})$ هو جيب أيِّ قياس من قياساتها، وكذلك فإنّ جيب تمام الزاوية الموجّهة $(\vec{u},\vec{v})$ هو جيب تمام أيٍّ من قياساتها. نرمز بالرمز $\sin(\vec{u},\vec{v})$ إلى جيب الزاوية الموجّهة $(\vec{u},\vec{v})$، وبالرمز $\cos(\vec{u},\vec{v})$ إلى جيب تمام الزاوية الموجّهة $(\vec{u},\vec{v})$.

③ العلاقة بين $\cos(\vec{u},\vec{v})$ و $\cos(\widehat{AOB})$ في حالة $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$.



ليكن α القياس الأساسيّ للزاوية الموجّهة $(\vec{u},\vec{v})$، وليكن θ قياس الزاوية الهندسيّة $\widehat{AOB}$ بالراديان. نعلم أنّ $\theta=\left|\alpha\right|$، إذن

- في حالة $0\ \alpha\geq$ يكون $\theta=\left|\alpha\right|=\alpha$ ومن ثمّ $\cos\theta=\cos\alpha$.
- في حالة $\alpha\leq 0$ يكون $\theta=\left|\alpha\right|=-\alpha$ ومن ثَمّ $\cos\theta=\cos(-\alpha)=\cos\alpha$.

إذن للزاوية الموجّهة لشعاعين، وللزاوية الهندسيّة التي يصنعانها جيب التمام نفسه.

بوجه عام لا يكون $\sin(\vec{u},\vec{v})$ و $\sin(\widehat{AOB})$ متساويين.

- في حالة $\alpha\geq 0$ يكون $\theta=\alpha$ ومن ثَمّ $\sin\theta=\sin\alpha$.
- في حالة $\alpha\leq 0$ يكون $\theta=-\alpha$ ومن ثَمّ $\sin\theta=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$.

إذن يمكن أن يكون العددان $\sin(\vec{u},\vec{v})$ و $\sin(\widehat{AOB})$ متساويين أو متعاكسين.

تكريساً للفهم

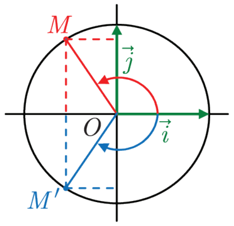
كيف نثبت أو نسترجع النسب المثلّثيّة لزوايا مترافقة ؟

نسمّي زوايا مرافقة لزاوية موجّهة قياسها x، الزوايا التي تقبل كلّاً من $-x$ أو $\pi-x$ أو $\pi+x$ أو $\frac{\pi}{2}-x$ أو $\frac{\pi}{2}+x$ قياساً لها.

يمكن الحصول على النسب المثلّثيّة لهذه الزوايا بالاستفادة من الدائرة المثلّثيّة، والاستعانة بالانعكاسات والتناظرات المركزيّة. فيما يأتي، x عددٌ حقيقي كيفي، و M هي النقطة من الدائرة المثلّثيّة التي تمثّل x.

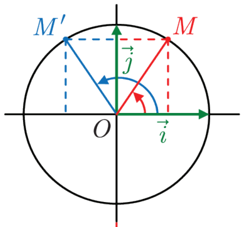
1. النقطة M' الموافقة للعدد $-x$ هي نظيرة M بالنسبة إلى محور الفواصل. إذن للنقطتين M و M' الفاصلة نفسها وترتيبان متعاكسان.

$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\sin(-x) = -\sin x$$



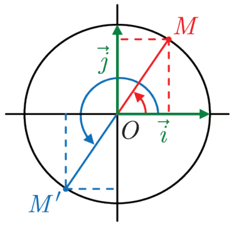
2. النقطة M' الموافقة لـ $\pi - x$ هي نظيرة M بالنسبة إلى محور التراتيب. إذن للنقطتين M و M' الترتيب نفسه وفاصلتان متعاكستان.

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$
$$\sin(\pi - x) = \sin x$$



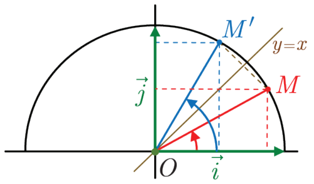
3. النقطة M' الموافقة لـ $\pi + x$ هي نظيرة M بالنسبة إلى المبدأ. إذن فاصلتا النقطتين M و M' متعاكستان وترتيباهما متعاكسان أيضاً.

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$



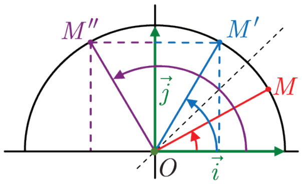
4. النقطة M' الموافقة للعدد $\frac{\pi}{2} - x$ هي نظيرة M بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته $y = x$. إذن فاصلة M' تساوي ترتيب M وترتيب M' يساوي فاصلة M.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x,$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$



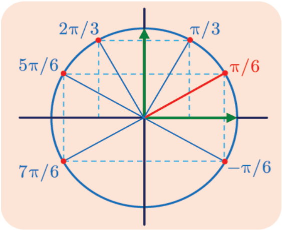
5. النقطة M'' الموافقة للعدد $\frac{\pi}{2} + x$ هي نظيرة M'، الموافقة للعدد $\frac{\pi}{2} - x$، بالنسبة إلى محور التراتيب. إذن للنقطتين M' و M'' الترتيب نفسه وفاصلتان متعاكستان:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$



مثال نعلم أنّ $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ وأنّ $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$، إذن يمكننا أن نستنتج من ذلك قيم النسب المثلّثيّة للزوايا المرافقة كما يأتي :

x	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
sin	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$



تدرّبْ

ليكن $(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ مَعْلَماً متجانساً مباشراً، ولتكن $\mathcal{C}$ الدائرة المثلّثيّة التي مركزها O في هذا المَعْلَم، نتأمّل نقطة M من $\mathcal{C}$ ونضع $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}) = x$.

① عيِّن على $\mathcal{C}$ النقاط الموافقة للقياسات $\pi - x$ و $\pi + x$ و $2\pi - x$، ثُمّ اختزل الصيغة:

$$f(x) = \cos x + \cos(\pi - x) + \cos(\pi + x) + \cos(2\pi - x).$$

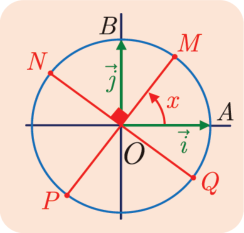
② عيِّن على $\mathcal{C}$ النقاط الموافقة للقياسات $\frac{\pi}{2} + x$ و $\pi + x$ و $\frac{\pi}{2} - x$، ثُمّ اختزل الصيغة:

$$g(x) = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

③ عيِّن على الدائرة $\mathcal{C}$ النقاط الموافقة للقياسات $\frac{5\pi}{2} - x$ و $3\pi + x$ و $5\pi - x$ و $x - \frac{\pi}{2}$، ثُمّ اختزل الصيغة: $\sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \sin(3\pi + x) + \cos(5\pi - x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

④ عيِّن على $\mathcal{C}$ النقطة M إذا علمتَ أنّ $\cos x = \frac{3}{5}$ و $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. ثُمّ احسب النسب المثلّثيّة الآتية: $\sin x$ و $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ و $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ و $\cos(\pi - x)$ و $\sin(\pi - x)$.

⑤ النقاط M و N و P و Q معيّنة على الدائرة المثلّثيّة كما في الشكل المجاور.



ما القياسات التي تعيِّن هذه النقاط ؟ تذكّر أنّ x تساوي $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$، ثُمّ اختزل الصيغتين :

$$f(x) = \cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(x + \pi) + \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$
$$g(x) = \sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(x + \pi) + \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

⑥ عيِّن قيمة جيب وجيب تمام الأعداد الحقيقيّة الآتية. يمكنك البدء بتعيين النقاط الموافقة على دائرة مثلّثيّة.

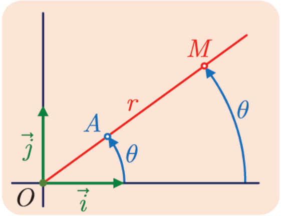
$\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ و $\frac{7\pi}{6}$ و $\frac{11\pi}{6}$ و $\frac{13\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{9\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$

و $\frac{81\pi}{4}$ و $-\frac{108\pi}{4}$ و $\frac{4\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{71\pi}{3}$ و $\frac{97\pi}{3}$ و $-\frac{54\pi}{3}$

4 الإحداثيّات القطبيّة

1.4. الإحداثيّات القطبيّة لنقطة

ليكن $(O;\vec{i},\vec{j})$ مَعْلَماً متجانساً مباشراً في المستوي. إذا كانت النقطة M مختلفة عن O، أمكن تحديد موضع النقطة M بمعرفة الزاوية $\theta=(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ والمسافة $r=OM$ التي تمثّل بُعد M عن O.

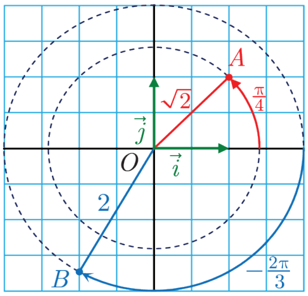


وبالعكس، إنّ إعطاء $(r;\theta)$، حيث $r>0$ و $\theta\in\mathbb{R}$، يكفي لتعيين نقطة، ونقطة وحيدة فقط، M تُحقّق $OM=r$ و $(\vec{i},\overrightarrow{OM})=\theta$. لتعيين النقطة M، نرسم نصف المستقيم $[OA)$ المعيّن بالعلاقة $(\vec{i},\overrightarrow{OA})=\theta$، ثُمّ نحدّد على $[OA)$ النقطة M المعيّنة بالشرط $OM=r$.

تعريف 4

ليكن $(O;\vec{i},\vec{j})$ مَعْلَماً متجانساً مباشراً في المستوي. إذا كانت النقطة M مختلفة عن O، أسمينا أيّ زوج $(r;\theta)$ يُحقّق الشرطين $\theta=(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ و $r=OM$، زوج إحداثيّات قطبيّة للنقطة M، ورمزنا إلى ذلك بالرمز $M(r;\theta)$. ونقول أيضاً إنّ $(r;\theta)$ هي إحداثيّات قطبيّة للشعاع $\overrightarrow{OM}$.

مثال في الشكل المجاور، نلاحظ أنّ الإحداثيّات القطبيّة للنقطة A هي $\left(\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right)$، وكذلك أنّ الإحداثيّات القطبيّة للنقطة B هي $\left(2;-\frac{2\pi}{3}\right)$.



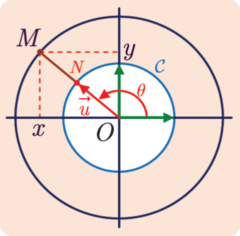
2.4. العلاقة بين الإحداثيّات القطبيّة والإحداثيّات الديكارتيّة

مُبرهَنة 4

ليكن $(O;\vec{i},\vec{j})$ مَعْلَماً متجانساً مباشراً في المستوي. ولتكن M نقطة غير O، نفترض أنّ $(r;\theta)$ هو زوج إحداثيّات قطبيّة للنقطة M، وأنّ (x,y) هما إحداثيّتا النقطة M. عندئذ

$r=\sqrt{x^2+y^2}$ و $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$.

الإثبات



لنرسم الدائرة المثلّثيّة $\mathcal{C}$ التي مركزها O، عندئذ تقطع هذه الدائرة نصف المستقيم $[OM)$ في نقطة N. للشعاعين $\overrightarrow{ON}$ و $\overrightarrow{OM}$ المنحى نفسه والجهة نفسها، ولمّا كان $OM = r$ و $ON = 1$ استنتجنا أنّ $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{ON}$.

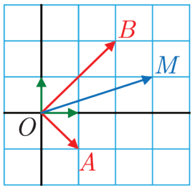
إحداثيّتا النقطة N هما $(\cos\theta, \sin\theta)$ لأنّ N تنتمي إلى $\mathcal{C}$. ولأنّ $(\vec{i}, \overrightarrow{ON}) = (\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \theta$، إذن إحداثيّتا النقطة M هما $(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

ومن جهة ثانية لدينا $OM^2 = x^2 + y^2 = r^2$ وضوحاً.

تكريساً للفهم

عموماً **لا** يمكن تطبيق قواعد الحساب المألوفة في الإحداثيّات الديكارتيّة على الإحداثيّات القطبيّة.

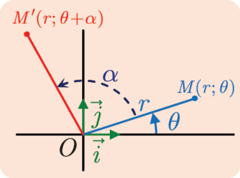
- فمثلاً، الإحداثيّات القطبيّة لمجموع شعاعين $\vec{u} + \vec{v}$ **لا** تساوي مجموع الإحداثيّات القطبيّة للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$. كما هي حال الإحداثيّات الديكارتيّة.



ففي الشكل المجاور لدينا $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. والإحداثيّات القطبيّة للنقطتين A و B هي $\left(\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right)$ و $\left(2\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right)$ بالترتيب. ولكن من الواضح أنّ $\left(3\sqrt{2}; 0\right)$ ليست إحداثيّات قطبيّة للنقطة M.

أمّا في الإحداثيّات الديكارتيّة فنجد $A(1,-1)$ و $B(2,2)$ و $M(3,1)$.

- ولكن للإحداثيّات القطبيّة فوائد أخرى. سندرس بعضها في العام المقبل.

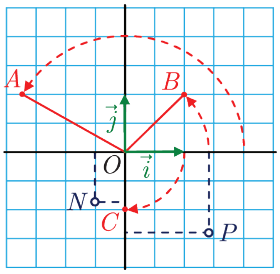


ففي الشكل المجاور، M' هي صورة M وفق الدوران R الذي مركزه O وزاويته α. إذن $OM' = OM$ و $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = \alpha$

فإذا كانت $(r; \theta)$ هي الإحداثيّات القطبيّة للنقطة M وكان $M'\left(r'; \theta'\right)$ استنتجنا أنّ $r = r'$ و $\theta' = \theta + \alpha$.

كيف ننتقل من التمثيل القطبي إلى التمثيل الديكارتي؟

مثال ليكن $(O; \vec{i}, \vec{j})$ مَعْلَماً متجانساً مباشراً في المستوي.



① احسب الإحداثيّات الديكارتيّة للنقاط ذات الإحداثيّات القطبيّة الآتية:

$A\left(2; \frac{5\pi}{6}\right)$، $B\left(\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right)$، $C\left(1; -\frac{\pi}{2}\right)$.

② احسب إحداثيّات قطبيّة للنقاط ذات الإحداثيّات الديكارتيّة الآتية:

$N\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$، $P\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$.

الحل

① الإحداثيّتان الديكارتيّتان للنقطة A معرّفتان بالعلاقتين:

$$y_A = r\sin\theta = 2\times\frac{1}{2} = 1 \quad \text{و} \quad x_A = r\cos\theta = 2\times\frac{-\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

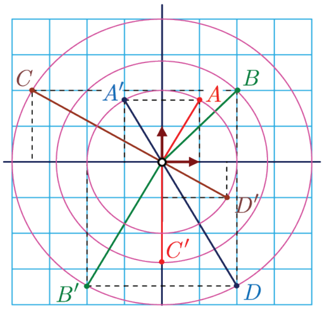
ومنه $A(-\sqrt{3},1)$. ونجد بأسلوب مماثل أنّ $B(1,1)$ و $C(0,-1)$.

② الإحداثيّات القطبيّة للنقطة N معرّفة على الوجه الآتي:

❶ $r = \sqrt{x_N^2 + y_N^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$.

❷ ومن جهة ثانية، تُحقّق θ الشرطين $\cos\theta = \frac{x_N}{r} = -\frac{1}{2}$ و $\sin\theta = \frac{y_N}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، وهنا نتعرّف النسب المثلّثيّة للزاوية $-\frac{2\pi}{3}$ إذن $N\left(1;-\frac{2\pi}{3}\right)$ ، وكذلك نجد $P\left(2;-\frac{\pi}{4}\right)$.

تَدرَّبْ



① عيِّن الإحداثيّات القطبيّة $(r;\theta)$ التي تحقق الشرط $\theta \in [0,2\pi[$ ، لكلٍّ من النقاط A و A' و B و B' و C و C' و D و D' المبيّنة في الشكل المجاور.

② كلٌّ واحدة من النقاط الآتية معرفة بإحداثيّاتها الديكارتية (x,y) . احسب إحداثيّاتها القطبيّة $(r;\theta)$ التي تحقق الشرط $\theta \in]-\pi,\pi]$.

$$A(-1,1),\quad B(\sqrt{3},1),\quad C(-1,\sqrt{3}),\quad D(0,4),$$
$$E(3,0),\quad F(-2,2),\quad G\left(\tfrac{3\sqrt{3}}{2},-\tfrac{3}{2}\right),\quad H\left(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right),$$
$$I\left(\sqrt{2},\sqrt{6}\right),\quad J\left(\tfrac{\sqrt{3}}{4},\tfrac{1}{4}\right),\quad K(-3,0),\quad L(-2\sqrt{3},2),$$

③ كلٌّ واحدة من النقاط الآتية معرفة بإحداثيّاتها القطبيّة $(r;\theta)$. احسب إحداثيّاتها الديكارتيّة (x,y) .

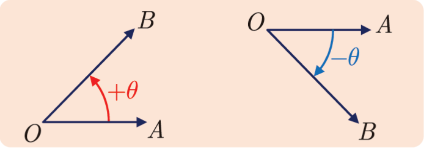
$$A(1;0),\quad B\left(2;\tfrac{\pi}{2}\right),\quad C(3;\pi),\quad D\left(4;\tfrac{3\pi}{2}\right),$$
$$E\left(2\sqrt{2};-\tfrac{\pi}{4}\right),\quad F\left(2;\tfrac{\pi}{6}\right),\quad G\left(\tfrac{1}{2};\tfrac{5\pi}{6}\right),\quad H\left(3;\tfrac{\pi}{4}\right),$$
$$I\left(\sqrt{2};-\tfrac{3\pi}{4}\right),\quad J\left(\tfrac{3}{4};20\pi\right),\quad K\left(2;\tfrac{\pi}{3}\right),\quad L\left(2;\tfrac{2\pi}{3}\right),$$

④ لتكن M نقطة إحداثيّاتها القطبيّة $(r;\theta)$. الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ينقل M إلى N وينقل N إلى P وأخيراً ينقل P إلى Q . احسب الإحداثيّات القطبيّة للنقطة N ، واستنتج بأسلوب مماثل الإحداثيّات القطبيّة للنقطتين P و Q . ما نوع الرباعي $MNPQ$ ؟

2

أفكار يجب تَمثُّلها

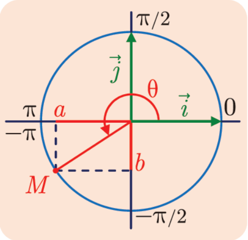
- للزاوية الموجّهة لشعاعين عددٌ لا نهائي من القياسات، ويختلف أيّ قياسين منها بمُضاعف للعدد 2π.
فإذا كان x قياساً لزاوية موجّهة كُتِب كلُّ قياس آخر بالشكل $x+2k\pi$ حيث $(k\in\mathbb{Z})$.
فمثلاً $-\dfrac{2\pi}{3}$ و $\dfrac{16\pi}{3}$ هما قياسان للزاوية الموجّهة نفسها لأنّ $\dfrac{16\pi}{3}-\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)=6\pi$.
- نكتب عادة $(\vec{u},\vec{v})=x[\bmod 2\pi]$ لنعبّر عن كون x واحداً من القياسات المختلفة لهذه الزاوية.
- ينتمي القياس الأساسيّ للزاوية الموجّهة $(\vec{u},\vec{v})$ إلى المجال $]-\pi,\pi]$.
- تساوي قياس الزاوية الهندسيّة الموافقة لشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ القيمة المطلقة للقياس الأساسيّ للزاوية الموجّهة $(\vec{u},\vec{v})$. فإذا كان $\theta=\widehat{AOB}$ كان القياس الأساسيّ للزاوية الموجّهة $(\vec{u},\vec{v})$ يساوي θ أو $-\theta$.



- تُحقّق الزوايا الموجّهة علاقة شال: $(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{w})=(\vec{u},\vec{w})$.
- ليكن $(O;\vec{i},\vec{j})$ مَعْلَماً متجانساً مباشراً في المستوي. تتمثّل الصلة بين الإحداثيّات الديكارتيّة (x,y) والإحداثيّات القطبيّة $(r;\theta)$ لنقطة M فيما يأتي:
$x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ و $OM=r$ و $(\vec{i},\overrightarrow{OM})=\theta$.

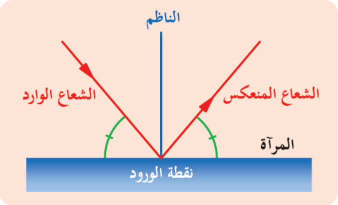
منعكسات يجب امتلاكُها

- لتعيين القياس الأساسيّ θ لزاوية موجّهة قياسها x معطى، نبحث عن عددٍ صحيح k_0 من $\mathbb{Z}$ يُحقّق $-\pi<x+2k_0\pi\le\pi$ وعندها يكون $\theta=x+2k_0\pi$.
- تفيد القسمة الإقليديّة أحياناً في حساب القياس الأساسيّ θ لزاوية. فمثلاً،
$\dfrac{25\pi}{3}=\dfrac{(3\times8+1)\pi}{3}=8\pi+\dfrac{\pi}{3}$ إذن $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.
- لإيجاد دساتير النسب المثلّثيّة لزوايا مرافقة لزاوية x، إذا لم تكن تحفظها عن ظهر قلب، فكّر بالاستفادة من الدائرة المثلّثيّة، ومن التناظرات الواضحة.
- ليكن a و b عددين حقيقيّين يُحقّقان $a^2+b^2=1$. لإيجاد θ تُحقق الشرطين $\cos\theta=a$ و $\sin\theta=b$ فكّر بالاستفادة من الدائرة المثلّثيّة وتذكّر أنّه توجد قيمة، وقيمة واحدة فقط من المجال $]-\pi,\pi]$ تُحقّق $\cos\theta=a$ و $\sin\theta=b$.



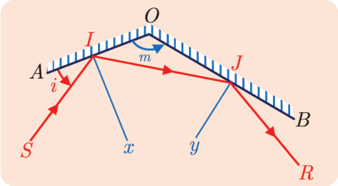
أنشطة

نشاط 1 الضوء الهندسيّ والزوايا الموجّهة



لنذكّر بقانون انعكاس الضوء المعروف في الفيزياء. ينعكس شعاعٌ ضوئي واردٌ على سطح مرآة مستوية مُناظراً للشعاع الوارد بالنسبة إلى الناظم على سطح المرآة عند نقطة الورود.

نهدف في الدراسة اللّاحقة إلى تعيين الزاوية الموجّهة بين الشعاع الوارد والشعاع المنعكس عن مرآة غير مستوية مكوّنة من سطحين مستويين عاكسين.



يوضّح الشكل المجاور الظاهرة. نفترض أنّ تمثيل الظاهرة يجري في مستوٍ موجّه. المرآة ممثّلة بالشكل AOB ، وقياس الزاوية بين السطحين هو $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = m$. أمّا قياس زاوية الورود فهو $(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IS}) = i$.

① بالاستفادة من التناظر القائم بالنسبة إلى (Ix) أثبت أنّ $(\overrightarrow{IS},\overrightarrow{IJ}) = \pi - 2i$.

② بالاستفادة من التناظر القائم بالنسبة إلى (Jy) أثبت أنّ $(\overrightarrow{JI},\overrightarrow{JR}) = \pi - 2(\overrightarrow{JO},\overrightarrow{JI})$.

③ بكتابة $(\overrightarrow{JO},\overrightarrow{JI}) = (\overrightarrow{JO},\overrightarrow{OI}) + (\overrightarrow{OI},\overrightarrow{JI})$ ، بيّن أنّ $(\overrightarrow{JO},\overrightarrow{JI}) = \pi - m - i$.

④ استنتج ممّا سبق قياساً للزاوية $(\overrightarrow{SI},\overrightarrow{JR})$. أيتعلّق هذا القياس بزاوية الورود i؟

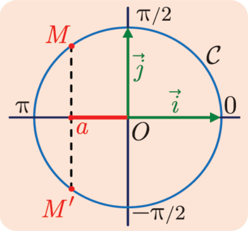
☜ نسمّي الزاوية $(\overrightarrow{SI},\overrightarrow{JR})$ زاوية الانحراف.

⑤ a. نفترض أنّ وجهَي المرآة متعامدان. ما قيمة زاوية الانحراف في هذه الحالة؟

b. حدِّد في هذه الحالة وضع الأشعّة الواردة والمنعكسة، ومثِّل ذلك بالرسم.

⑥ نفترض أنّ $m = \dfrac{3\pi}{4}$. ما وضع الأشعّة الواردة والمنعكسة في هذه الحالة ؟ مثِّل هذه الحالة بالرسم.

نشاط 2 المعادلات المثلّثيّة



❶ المعادلة $\cos x = a$ ، حيث a عددٌ حقيقي مُعطى.

① أثبت أن لا حلَّ للمعادلة $\cos x = a$ في حالة $|a| > 1$.

② نفترض أنّ $-1 \leq a \leq 1$.

- عيِّن على الشكل النقطة $P(a,0)$ ، والنقطتين M و M' من الدائرة المثلّثيّة $\mathcal{C}$ اللتين فاصلتاهما a . (يمكن أن تنطبق النقطتان M و M'). M هي النقطة التي تقبل قياساً θ للزاوية $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ محصوراً بين 0 و π .
- أثبت أنّ $(\vec{i},\overrightarrow{OM'}) = -\theta$.
- أثبت أن حلول $\cos x = a$ هي $x = \theta + 2k\pi$ أو $x = -\theta + 2k'\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ و $k' \in \mathbb{Z}$.

③ حلَّ كلّاً من المعادلات الآتية :

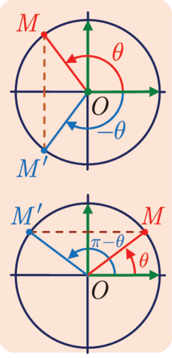
$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\cos x = \frac{1}{2}$ و $2\cos x + \sqrt{3} = 0$ و $\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\cos 4x = \frac{1}{2}$.

❷ المعادلة $\sin x = b$، حيث b عددٌ حقيقي مُعطى.

① باتّباع أسلوب مماثل للحالة السابقة، أثبت أن ليس لهذه المعادلة حلول في حالة $|b| > 1$. وأنّه في الحالة المعاكسة، تتكوَّن مجموعة الحلول من الأعداد $x = \theta + 2k\pi$ أو $x = \pi - \theta + 2k'\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ و $k' \in \mathbb{Z}$، والعدد θ هو عددٌ محصور بين $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ ويُحقّق $\sin\theta = b$.

② حلّ كلّاً من المعادلات الآتية:

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\sin x = \frac{1}{2}$ و $2\sin x + \sqrt{2} = 0$ و $\sin 3x = \frac{1}{2}$ و $\sin 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



الخلاصة : يمكن تلخيص نتائج الدراسة السابقة كما يأتي :

- في $\mathbb{R}$، تُكافئ المعادلة $\cos x = \cos\theta$ ما يأتي :
  $x = \theta + 2k\pi$ أو $x = -\theta + 2k'\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ و $k' \in \mathbb{Z}$.
- في $\mathbb{R}$، تُكافئ المعادلة $\sin x = \sin\theta$ ما يأتي:
  $x = \theta + 2k\pi$ أو $x = \pi - \theta + 2k'\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ و $k' \in \mathbb{Z}$.

❸ أعدادٌ حقيقيّة لها الجيب نفسه، أو جيب التمام نفسه.

① بالاستفادة من الدائرة المثلّثيّة أثبت تكافؤ الخاصتّين الآتيتين :

» للعددين الحقيقيين x و y جيب التمام نفسه : $\cos x = \cos y$«

» $x = y + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$، أو $x = -y + 2k'\pi$ مع $k' \in \mathbb{Z}$«

② أثبت كذلك تكافؤ الخاصتّين الآتيتين:

» للعددين الحقيقيين x و y الجيب نفسه : $\sin x = \sin y$«

» $x = y + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$، أو $x = \pi - y + 2k'\pi$ مع $k' \in \mathbb{Z}$«

③ **تطبيق**: حلَّ كلّاً من المعادلتين $\sin 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ و $\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

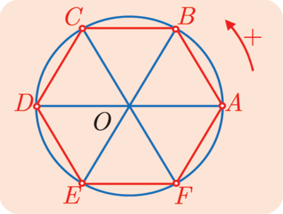
❹ معادلات من الصيغة $\sin(v(x)) = \cos(u(x))$.

بوجه عامّ، لحلّ معادلة من الصيغة $\cos u = \sin v$، نُرجع هذه المعادلة إلى معادلة من الصيغة $\cos u = \cos V$ بأن نكتب $\sin v = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$، أو نُرجعها إلى معادلة من الصيغة $\sin U = \sin v$ بكتابة $\cos u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$.

حلَّ كلّاً من المعادلتين الآتيتين $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 3x$. و $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

تمرينات ومسائل

1 $ABCDEF$ مسدّس منتظم مرسوم في مستوٍ موجّه عيِّن القياس الأساسيّ للزوايا الموجّهة الآتية:

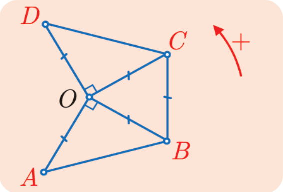


① $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF})$ ② $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO})$ ③ $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$

④ $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OE})$ ⑤ $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE})$ ⑥ $(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF})$

⑦ $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BF})$ ⑧ $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})$ ⑨ $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC})$

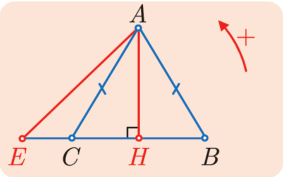
2 تأمّل الشكل المجاور المرسوم في مستوٍ موجّه، والمعطيات المبيّنة عليه، ثُمّ عيِّن القياس الأساسيّ للزوايا الموجّهة الآتية



① $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{OC})$ ② $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD})$ ③ $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})$

④ $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BC})$ ⑤ $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{DB})$ ⑥ $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{DO})$

3 في الشكل المجاور المرسوم في مستوٍ موجّه، ABC مثلّث متساوي الأضلاع، و EHA مثلّث متساوي الساقين وقائم الزاوية في H. عيِّن القياس الأساسيّ للزوايا الآتية :

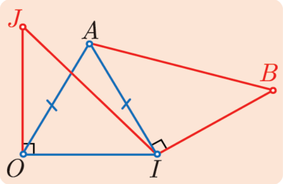


① $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ ② $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB})$ ③ $(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{EB})$

④ $(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EC})$ ⑤ $(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{CH})$ ⑥ $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE})$

4 نعطي α قياس الزاوية الموجّهة $(\vec{u},\vec{v})$. أوجد قياساً للزوايا الآتية : $(3\vec{u},-2\vec{v})$ و $(-2\vec{v},\vec{u})$ و $(5\vec{v},4\vec{u})$ و $(-5\vec{u},-6\vec{v})$.

5 نتأمّل مثلثاً AOI متساوي الأضلاع فيه $(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AI})=\frac{\pi}{3}$. وكذلك نتأمّل المثلّثين OIJ و IBA ونفترض أنّهما متساويا الساقين وقائمان، وفيهما $(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IA})=(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})=\frac{\pi}{2}$.



① علّل صحّة المساواة $(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AO})+(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AI})+(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB})$.

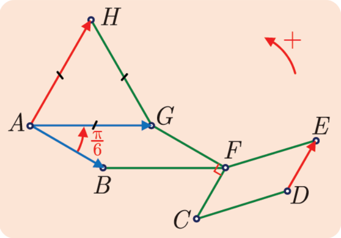
② احسب قياس كلٍّ من الزوايا الهندسيّة $\widehat{JAO}$ و $\widehat{OAI}$ و $\widehat{IAB}$.

③ استنتج قياساً لكلٍّ من $(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AO})$ و $(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AI})$ و $(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB})$.

④ استنتج قياساً للزاوية $(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AB})$. ماذا تقول بشأن النقاط A و B و J ؟

لنتعلّم البحث معاً

6 الزوايا الموجّهة والتوازي



نتأمّل في المستوي الموجّه، الشكلَ المجاور، الذي فيه $ABFG$ متوازي أضلاع، و $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AG})=\frac{\pi}{6}$، والمثلّث AGH متساوي الأضلاع، ويُحقق $(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AH})=\frac{\pi}{3}$، وأخيراً $CDEF$ متوازي أضلاع ويُحقّق $(\overrightarrow{FG},\overrightarrow{FC})=\frac{\pi}{2}$. أثبت توازي المستقيمين (AH) و (DE).

نحو الحلّ

فهم السؤال. لنستخلص نتائج مباشرة من الافتراضات والشكل. يفيدنا وجود مثلّث متساوي الأضلاع وشكل متوازي الأضلاع في حساب قياس بعض الزوايا الهندسيّة.

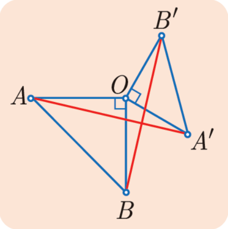
1. احسب قياس زوايا الشكلين AGH و $AGFB$.
2. أعد رسم الشكل وعيِّن عليه قيم الزوايا التي حسبتها.

بحثاً عن طريق. لإثبات توازي المستقيمين (AH) و (DE)، يمكن إثبات الارتباط الخطّي للشعاعين $\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{DE}$ وذلك بإيجاد قياس للزاوية $(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{DE})$. وتوجّهنا القياسات المُستنتجة من الفرْض إلى الاستفادة من علاقة شال.

1. علّل صحّة: $(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{DE})=(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AG})+(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE})$.
2. علّل صحّة: $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE})=(\overrightarrow{GF},\overrightarrow{DE})=(\overrightarrow{GF},\overrightarrow{CF})=(\overrightarrow{FG},\overrightarrow{FC})$.
3. استنتج قياساً للزاوية $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE})$.

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

7 قطع مستقيمة متساوية الطول ومتعامدة



نتأمّل في المستوي الموجّه، مثلثين متساويي الساقين وقائمين OAB و $OA'B'$ فيهما $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'})=\frac{\pi}{2}$. أثبت من جهة أولى أنّ $AA'=BB'$، وأثبت من جهة ثانية تعامد المستقيمين (BB') و (AA').

نحو الحلّ

✌ **فهم السؤال.** إنّ المثلّث القائم والمتساوي الساقين شكلٌ مفتاحي مميَّز لدوران. يوحي وجوده باستعمال دوران زاويته $\frac{\pi}{2}$ أو $-\frac{\pi}{2}$.

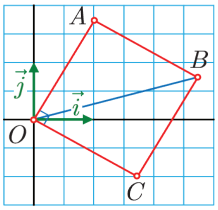
1. استناداً إلى الافتراضات، أيّ دوران $\mathcal{R}$ برأيك يؤدّي دوراً مهمّاً في مسألتنا؟
2. أشر إلى النقاط التي يقرنها الدوران $\mathcal{R}$.

✌ **بحثاً عن طريق.** نهدف إلى إثبات تساوي طول قطعتين مستقيمتين وتعامدهما. لقد تعاملنا مع دورانات، ونعلم أنّ الدوران يحافظ على أطوال القطع المستقيمة، وإذا كانت زاويته $\pm\frac{\pi}{2}$ كانت صورةُ قطعةٍ مستقيمةٍ قطعةً مستقيمةً عموديّةً عليها.

1. ما صورة القطعة المستقيمة $[AA']$ وفق $\mathcal{R}$ ؟
2. أنجز الإثبات بالاستفادة من خواصّ الدوران $\mathcal{R}$.

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

8 حساب الإحداثيّات



$(O;\vec{i},\vec{j})$ مَعْلَم متجانس مباشر. و A نقطة إحداثيّاتها القطبيّة $\left(2;\frac{\pi}{3}\right)$. و $OABC$ مربّع فيه $(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA})=\frac{\pi}{2}$. يُطلب حساب القيم الدقيقة (دون تقريب) لكلٍّ من $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$. لتحقيق ذلك احسب الإحداثيّات الدّيكارتيّة للنقطة C، واستفد من المساواة $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$ لحساب الإحداثيّات الدّيكارتيّة ثُمّ القطبيّة للنقطة B.

نحو الحلّ

✌ **فهم السؤال.** ليس من السهل حساب الإحداثيّات الدّيكارتيّة للنقطة C مباشرة. إنّ إعطاء الإحداثيّات القطبيّة للنقطة A والفرْض الموضوع على $OABC$ يجعلاننا نفكّر أوّلاً بحساب الإحداثيّات القطبيّة للنقطة C.

✌ **بحثاً عن طريق.**

1. لحساب الزاوية $(\vec{i},\overrightarrow{OC})$ استفد من علاقة شال $(\vec{i},\overrightarrow{OC})=(\vec{i},\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})$، واستنتج الإحداثيّات القطبيّة للنقطة C، ثُمّ احسب إحداثيّاتها الديكارتيّة.
2. احسب الإحداثيّات الديكارتيّة للنقطة A، واستنتج الإحداثيّات الديكارتيّة للنقطة B.
3. اتّبع أسلوب السؤال 1. لتحسب الإحداثيّات القطبيّة للنقطة B.

تَعرف الآن قيم x_B و y_B و r و θ ويمكنك التعبير عن x_B و y_B بدلالة r و $\cos\theta$ و $\sin\theta$.

1. اكتب العلاقتين اللتين تحصل عليهما.

2. استنتج قيمة كلٍّ من $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

9 الإحداثيّات القطبيّة والمثلّثات

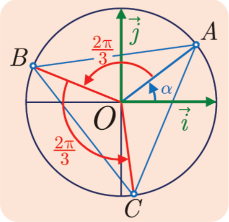
$(O;\vec{i},\vec{j})$ مَعْلَم متجانس مباشر. الدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ ينقل النقطة A التي إحداثيّاتها القطبيّة $(1;\alpha)$ إلى B، وينقل النقطة B إلى C.

① أثبت أنّ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

② استنتج أنّ

$$\cos\alpha+\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)=0$$
$$\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)=0$$

نحو الحلّ



① **فهم السؤال**. لنرسم شكلاً، كي نرى ونحسب بوجه أفضل. لأنّ $\mathcal{R}(A)=B$ يمكننا بسهولة استنتاج الإحداثيّات القطبيّة للنقطة B، ومن ثَمّ، كذلك الإحداثيّات القطبيّة للنقطة C، لأنّ $\mathcal{R}(B)=C$. إنّ المساواة الشعاعيّة المطلوبة تميِّز مركز ثقل المثلّث ABC، أي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$. إذن يجب أن نبرهن أنّ O هو مركز ثقل هذا المثلّث، ولكنّ المثلّث ABC متساوي الأضلاع والنقطة O نقطة مميّزة فيه.

بحثاً عن طريق. ما صورة C وفق الدوران $\mathcal{R}$؟ أثبت بالاستعانة بصور النقاط A و B و C وفق $\mathcal{R}$ أنّ ABC متساوي الأضلاع. أثبت أنّ O هو مركز ثقل المثلّث ABC واستنتج أنّ

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

② **فهم السؤال**. نريد استنتاج مساواتين عدديّتين انطلاقاً من مساواة شعاعيّة. فنتذكّر الإحداثيّات الديكارتيّة.

بحثاً عن طريق. اكتب الإحداثيّات القطبيّة للنقطتين B و C، واستنتج الإحداثيّات الديكارتيّة للنقاط A و B و C بدلالة α. وأخيراً استنتج الإحداثيّات الديكارتيّة للشعاع $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

10 حساب مجاميع

لنتأمّل المجموعين الآتيين

$$U = \cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{8} + \cos\frac{5\pi}{8} + \cos\frac{7\pi}{8}$$
$$V = \sin\frac{\pi}{8} - \sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{5\pi}{8} - \sin\frac{7\pi}{8}$$

احسب القيم الدّقيقة للعددين U و V.

نحو الحلّ

✌ **فهم السؤال.** نحن لا نعرف القيم الدّقيقة لحدود المجموعين U و V مباشرة. ولكن إذا تأمّلنا جيِّداً الأعداد $\frac{\pi}{8}$ و $\frac{3\pi}{8}$ و $\frac{5\pi}{8}$ و $\frac{7\pi}{8}$. لاحظنا أنّها من مضاعفات العدد $\frac{\pi}{8}$. يدفعنا ذلك إلى التفكير بالزوايا المترافقة.

✌ **بحثاً عن طريق.** لاحظ أنّنا ننتقل من عددٍ إلى الذي يليه من بين الأعداد $\frac{\pi}{8}$ و $\frac{3\pi}{8}$ و $\frac{5\pi}{8}$ و $\frac{7\pi}{8}$ بإضافة العدد نفسه. أعِد تجميع حدود المجموعين U و V لتحصل على زوايا مترافقة. يمكنك الإستفادة من الدائرة المثلّثيّة بعد أن تعيِّن النقاط المناسبة عليها.

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

11 تعيين النقاط على الدائرة.

$(O;\vec{i},\vec{j})$ مَعْلَم متجانس مباشر. $\mathcal{C}$ الدائرة المثلّثيّة التي مركزها O، و M و N نقاط من $\mathcal{C}$ إحداثيّاتها القطبيّة من الشكل $(1;x)$.

① عيّن النقاط M التي تُحقّق $4x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$، والنقاط N التي تُحقّق $4x = \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi$.

② استنتج الحلول المنتمية إلى المجال $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ للمعادلة $\cos(4x) = -\frac{1}{2}$.

نحو الحلّ

① ✌ **فهم السؤال.** نعرف كيف نعيِّن نقطة $M(1;x)$ عندما تتوفّر لدينا مساواة من الصيغة $x = \theta + k \times 2\pi$، حيث $k \in \mathbb{Z}$. هنا $4x = \frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi$ أي $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k}{4} \times 2\pi$. نلاحظ أنّ x ليست من الصيغة $\frac{\pi}{6} + K \times 2\pi$، و $K \in \mathbb{Z}$، لأنّ $\frac{k}{4}$ ليس عدداً صحيحاً بوجه عام.

✌ **بحثاً عن طريق.** عيِّن النقاط M_0 و M_1 و M_2 و M_3 من $\mathcal{C}$ التي نحصل عليها بإعطاء القيم k المتتالية 0، 1، 2، 3.

- في حالة $k=4$ ماذا يمكنك القول عن M_4 ؟ علِّل صحّة المقولة «توجد أربع نقاط من $\mathcal{C}$ إحداثيّاتها القطبيّة $(1;x)$ تُحقّق $4x=\frac{2\pi}{3}+k\times 2\pi$».
- بأسلوب مماثل، أثبت أنّه توجد أربع نقاط N_0 و N_1 و N_2 و N_3 من $\mathcal{C}$ إحداثيّاتها القطبيّة $(1;x)$ تحقّق $4x=-\frac{2\pi}{3}+k\times 2\pi$. عيِّن هذه النقاط على الدائرة المثلّثيّة.

② ☝ **فهم السؤال**. نعلم أنّ المعادلة $\cos X=-\frac{1}{2}$ تُكافئ $X=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$، حيث k عدد صحيح من $\mathbb{Z}$. أو $X=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$، و $k\in\mathbb{Z}$. إذن الأعداد x التي تُحقِّق $\cos 4x=-\frac{1}{2}$ هي الأعداد x التي تعيِّن على $\mathcal{C}$ النقاط الثمان التي وجدناها سابقاً. ومن بينها يجب اختيار تلك التي تُحقّق الشرط الموضوع.

✌ **بحثاً عن طريق**. عيّن حلول المعادلة $\cos(4x)=-\frac{1}{2}$ في $\mathbb{R}$.

- ثمّ عيّن على $\mathcal{C}$ القوس الموافق للأعداد الحقيقيّة من المجال $I=\left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$، ومن بين النقاط الثمان التي وجدتها في ① عيّن تلك التي تنتمي إلى هذا القوس.
- استنتج حلول المعادلة $\cos(4x)=-\frac{1}{2}$ في المجال $I=\left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

12 متراجحات مثلّثيّة.

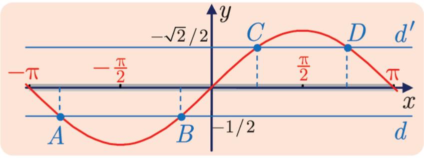
نتأمّل ثلاثة مجالات $I_1=\left[-\pi,\pi\right]$ و $I_2=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ و $I_3=\left[0,2\pi\right]$. جِدْ، في كلِّ واحدٍ من هذه المجالات، الأعداد الحقيقيّة x التي تحقّق المتراجحة

$$-\frac{1}{2}\leq \sin x\leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

نحو الحلّ

☝ **فهم السؤال**. نهدف إلى حلِّ المتراجحتين $-\frac{1}{2}\leq \sin x$ و $\sin x\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$ في المجال I_1 ثمّ نأخذ الحلول المشتركة. لنستفد من التمثيل البيانيّ للتابع sin أو من التمثيل على دائرة مثلّثيّة. في الحقيقة إنّ التمثيل البيانيّ للتابع sin على المجال المعطى يجعل الحلَّ أمراً يسيراً.

فمثلاً، على المجال $I_1=\left[-\pi,\pi\right]$ نهدف إلى تعيين فواصل نقاط المنحني البيانيّ للتابع sin التي تقع فوق المستقيم d الذي معادلته $y=-\frac{1}{2}$ وتحت المستقيم d' الذي معادلته $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$، أي بين المستقيمين d و d'.



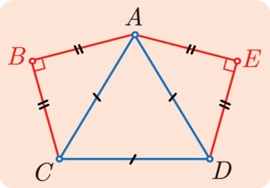
✌ **بحثاً عن طريق.** استفد من القيم المميَّزة للنسب المثلّثية لبعض الزوايا المألوفة لتجد فواصل النقاط A و B و C و D. استنتج المطلوب.

- أعد الدراسة في حالة $I_2=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$، وأثبت أنّ مجموعة الحلول مجالٌ يُطلب تعيينه.
- أعد الدراسة في حالة $I_3=\left[0,2\pi\right]$، وأثبت أنّ مجموعة الحلول هي اجتماع ثلاثة مجالات يُطلب تعيينها.

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

قُدُماً إلى الأمام

13 في مستوٍ موجّه، ACD مثلّث متساوي الأضلاع فيه $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ يساوي $\frac{\pi}{3}$، و ABC و DEA مثلّثان قائمان ومتساويا الساقين يقعان خارج ACD.



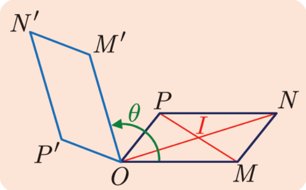
① احسب قياس كلٍّ من الزوايا الهندسيّة $\widehat{BAE}$ و $\widehat{BCD}$.

② استنتج قياس الزاويتين $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD})$ و $(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BA})$.

③ تحقّق أنّ : $(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CD})=(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD})$.

④ استنتج توازي المستقيمين (BE) و (CD).

14 في مستوٍ موجّه، $OMNP$ متوازي أضلاع مركزه I، و $\mathcal{R}$ دوران مركزه O وزاويته θ. M' و N' و P' هي، بالترتيب، صور النقاط M و N و P وفق الدوران $\mathcal{R}$.



① لماذا تكون I'، صورةُ I وفق $\mathcal{R}$، منتصفَ $[ON']$ ومنتصفَ $[M'P']$؟

② أثبت أنّ $OM'N'P'$ متوازي أضلاع.

③ أثبت أنّ : $(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M'N'})=(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OP'})$.

④ استنتج قياساً للزاوية $(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M'N'})$.

15 أثبت صحّة ما يأتي:

① في حالة $x\mapsto f(x)=2(\sin x)^2-3\sin x$ لدينا $f(\pi-x)=f(x)$.

② في حالة $x\mapsto f(x)=(\sin x)^3+(\cos x)^3$ يكون $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=f(x)$.

16 في كلٍّ من الحالات الآتية احسب $\sin x$ أو $\cos x$، ثمّ احسب $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

① $\sin x = -\dfrac{1}{4}$، و $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2},0\right[$.

② $\cos x = \dfrac{3}{5}$، و $x \in \left]\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right[$.

③ $\cos x = -\dfrac{1}{3}$، و $x \in \left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$.

④ $\sin x = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$، و $x \in \left]2\pi,\dfrac{5\pi}{2}\right[$.

17 في كلٍّ من الحالات الآتية نُعطي مجالاً I ومعادلة (1) ومتراجحة (2). حلَّ في I المعادلة (1) والمتراجحة (2).

① $I = [0,2\pi]$، $(1): \quad 2\sin x + 1 = 0,\quad (2): \quad 2\sin x + 1 < 0$

② $I = \left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$، $(1): \quad \sqrt{2}\cos x - 1 = 0,\quad (2): \quad \sqrt{2}\cos x - 1 > 0$

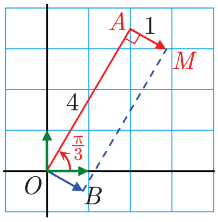
③ $I = [-\pi,\pi]$، $(1): \quad 2\sin x - \sqrt{3} = 0,\quad (2): \quad 2\sin x - \sqrt{3} \le 0$

18 في كلٍّ من الحالات الآتية نُعطي مجالاً I ومعادلة (1) ومتراجحة (2). حلَّ في I المعادلة (1) والمتراجحة (2).

① $I = [0,2\pi]$، $(1): \quad 2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = 1,\quad (2): \quad 2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) > 1$

② $I = [-\pi,\pi]$، $(1): \quad \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right) = 1,\quad (2): \quad \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right) > 1$

19 نعطي النقطتين A و M المعيَّنتين كما يبيِّن الشكل المجاور:



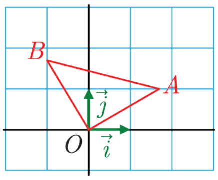
① احسب إحداثيّتي النقطة A الديكارتيّتين.

② نعيِّن النقطة B بالعلاقة $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OB}$، احسب $(\vec{i},\overrightarrow{OB})$.

③ احسب الإحداثيّات القطبيّة للنقطة B.

④ استنتج الإحداثيّات الديكارتيّة للنقطة M.

20 نعطي النقطتين $A(\sqrt{3},1)$ و $B(-1,\sqrt{3})$.



① احسب الإحداثيات القطبيّة للنقطتين A و B.

② احسب قياساً للزاوية $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.

③ استنتج طبيعة المثلّث AOB.

21 في كلٍّ من الحالات الآتية نُعطي مجالاً I ومعادلة (1) ومتراجحة (2). حلَّ في I المعادلة (1) والمتراجحة (2).

① $I=\left[0,\pi\right]$ ، $(1): \sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$, $(2): \sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\leq\frac{1}{2}$,

② $I=\left[0,2\pi\right]$ ، $(1): \cos\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1}{2}$, $(2): \cos\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)\geq\frac{1}{2}$,

③ $I=\left[-\pi,\pi\right]$ ، $(1): \sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin 3x$,

22 في كلٍّ من الحالات الآتية نُعطي مجالاً I ومعادلة (1). حلَّ في I المعادلة (1).

① $I=\left[-\pi,\pi\right]$ ، $(1):\ \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,

② $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ، $(1):\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos x$,

③ $I=\left[-\pi,\pi\right]$ ، $(1):\ \sin 3x=\cos 2x$,

23 حلَّ في $\mathbb{R}$ المعادلات الآتية.

① $\cos 2x=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ ② $\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

③ $\sin 2x=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ ④ $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$

⑤ $\sin 2x=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ ⑥ $\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{3}\right)=\sin x$

25 حلَّ في $\left[0,2\pi\right[$ المتراجحات الآتية.

① $\cos\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)\geq-\frac{1}{2}$ ② $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\leq-\frac{\sqrt{2}}{2}$

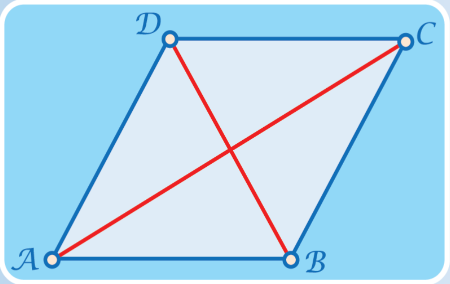
③ $\frac{1}{2}\leq\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ $\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$

⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leq\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\leq-\frac{1}{2}$ ⑥ $\sin 3x\leq\frac{1}{2}$

3

الجداء السُلَّمي

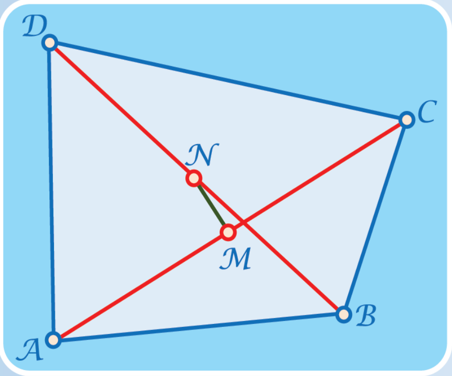
1. تعريف وعبارات الجداء السُلَّمي
2. الإسقاط القائم وقواعد الحساب
3. تطبيقات



متطابقة متوازي الأضلاع تنص على الخاصّة الآتية: في متوازي الأضلاع $ABCD$، مجموع مربّعات قطريه يساوي مجموع مربعات أضلاعه، أي

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$$
$$= 2\left(AB^2 + BC^2\right)$$

لاحظ أنّ هذه المتطابقة تؤول إلى مبرهنة فيثاغورث في حالة كون الرباعي $ABCD$ مستطيلاً، لأنّه في هذه الحالة يتساوى طولا القطرين. إذن متطابقة متوازي الأضلاع هي تعميم مبرهنة فيثاغورث.



وكذلك يمكن تعميم متطابقة متوازي الأضلاع لتأخذ الصيغة الآتية في حالة رباعي $ABCD$، منتصفي قطريه هما النقطتان M و N:

$$4MN^2 + AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$$

هذه النتائج وغيرها هي نتائج سهلة لمفهوم الجداء السُلَّمي للأشعّة. فتعالوا معاً نستكشف هذا المفهوم.

3

الجداء السُلَّمي

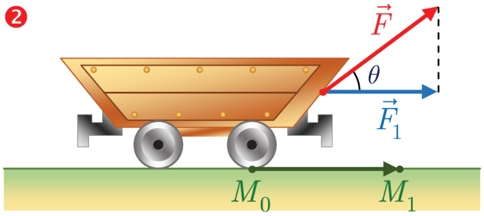
انطلاقة نشطة

الأشعّة هي كائنات رياضياتيّة يمكن إجراء حسابات عليها وبها: يمكن جمعها، وضربها بعدد، ونسْبُ إحداثيّاتٍ إليها، وقد رأينا في الصّف الأوّل الثّانوي، أنّ الحساب الشّعاعي يساعدُ في اختصار وتبسيط الكثير من العمليات، واختزال العديد من الرسوم والأشكال، وخصوصاً في بحث التوازي.

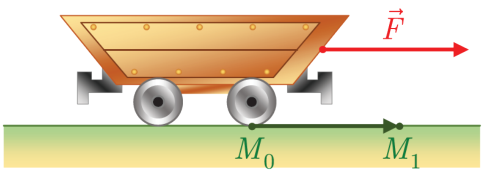
ورغبةً في استعمال الحساب الشعاعي لتبسيط دراسة مسائلَ أخرى تخصُّ الهندسة مثل التعامد، وحساب المسافات، وقياس الزوايا، نعمد إلى تعريف عمليّةٍ جديدة بين الأشعّة تسمَّى «الجداء السلَّمي» يكون ناتج شعاعين وفقها عدداً أو مقداراً سلّميّاً. الهدفُ من هذا الفصل والفصل الآتي هو دراسة هذا الجداء السُلَّمي وعرض بعضٍ من مجالات استعماله.

بالتأكيد كان الفيزيائيّون سبّاقين في استعمال الأشعّة وخصوصاً لتمثيل القوى. ولقد استعملوا الجداء السلمي لشعاعين بهدف قياس عمل القوّة. لنفترض أننا نجرّ عربة بقوة $\vec{F}$ بهدف تحريكها أفقيّاً من النقطة M_0 إلى النقطة M_1 . هناك حالتان تبعاً لمنحى القوّة $\vec{F}$:

❷



❶



وكما يقول الفيزيائيّون، عند الانتقال، تؤدّي القوّة $\vec{F}$ عملاً W:

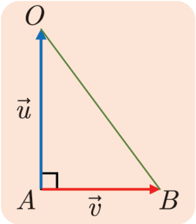
- يساوي $\|\overrightarrow{M_0M_1}\| \times \|\vec{F}\|$ في الحالة ❶.
- ويساوي $\|\overrightarrow{M_0M_1}\| \times \|\vec{F}_1\|$ في الحالة ❷، ولكن $\|\vec{F}_1\| = \|\vec{F}\| \times \cos\theta$، إذن

$$W = \|\vec{F}\| \times \|\overrightarrow{M_0M_1}\| \times \cos\theta$$

وكما سنرى، العمل W المعطى بهذه الصيغة هو في الحقيقة الجداء السُلَّمي للشعاعين $\vec{F}$ و $\overrightarrow{M_0M_1}$.

1 تعريف وعبارات الجداء السُلَّمي

1.1. تعريف



استناداً إلى مبرهنة فيثاغورث. يكون المثلّث OAB قائم الزاوية في A، إذا وفقط إذا كان $OB^2 - OA^2 - AB^2 = 0$، بوضع $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$، $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$. تُكتب العلاقة السابقة بالصيغة

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0$$

إذن يدلّ انعدام المقدار $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$ على تعامد الشعّاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$. يوحي لنا هذا بوضع التعريف الآتي:

تعريف 1

الجداء السُلَّمي للشعاع $\vec{u}$ بالشعاع $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي $\vec{u} \cdot \vec{v}$، المعطى بالصيغة

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

ونرمز اصطلاحاً إلى الجداء السُلَّمي $\vec{u} \cdot \vec{u}$ بالرمز $\vec{u}^2$، فيكون $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$.

إذا كان $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$، كان $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ وضوحاً.

2.1. عبارات أخرى للجداء السُلَّمي

① **الجداء السُلَّمي في معلمٍ متجانس**

مُبرهَنة 1

إذا كان $\vec{u}(x, y)$ و $\vec{v}(x', y')$ شعاعين في **معلمٍ متجانس**، كان $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

الإثبات

في هذه الشروط يكون، $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$ و $\|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2$، أمّا مركّبات الشعاع $\vec{u} + \vec{v}$ فهي $(x + x', y + y')$، إذن

$$\begin{aligned}\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (x + x')^2 + (y + y')^2 \\ &= x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 + 2(xx' + yy') \\ &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2(xx' + yy')\end{aligned}$$

وبالعودة إلى عبارة $\vec{u} \cdot \vec{v}$، نجد $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

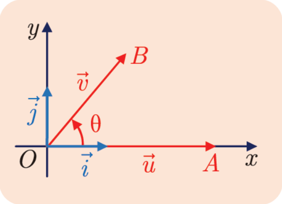
بافتراض أنَّ المعلم متجانس ضروري، إذ لا تكون العلاقة $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$ صحيحة إلاّ في هكذا معلم.

② الجداء السلَّمي بدلالة نظيمي الشعاعين والزاوية بينهما

مُبرهَنة 2

إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين غير معدومين، كان $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$.

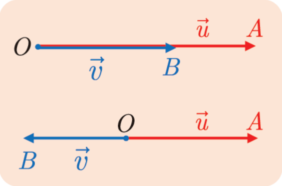
الإثبات



لنضع $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$، و $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$، و $\theta = (\vec{u},\vec{v})$ أي زاوية الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$. ولنختر معلماً متجانساً $(O,\vec{i},\vec{j})$ يكون فيه $\overrightarrow{OA} = \|\vec{u}\|\vec{i}$ بذلك تكون $(\|\vec{u}\|,0)$ مركّبتي الشعاع $\overrightarrow{OA}$. وتكون $(\|\vec{v}\|\cos\theta, \|\vec{v}\|\sin\theta)$ مركّبتي الشعاع $\overrightarrow{OB}$. وعندها

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' = xx' = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$$

③ الجداء السلَّمي في حالة شعاعين مرتبطين خطيّاً



- إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطّياً وبالاتّجاه نفسه، كان $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$
- إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطّياً وباتّجاهين متعاكسين، كان
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = -\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$$

في الحالة الأولى لدينا $(\vec{u},\vec{v}) = 0$ إذن $\cos(\vec{u},\vec{v}) = 1$، وفي الحالة الثانية لدينا $(\vec{u},\vec{v}) = \pi$ إذن $\cos(\vec{u},\vec{v}) = -1$.

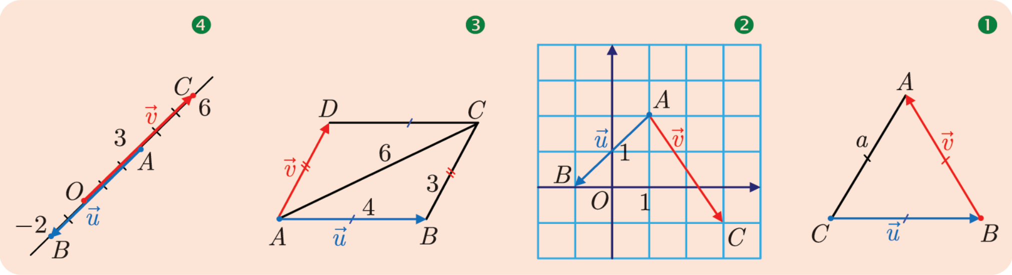
تكريساً للفهم

لماذا توجد تعاريفُ عدة للجداء السلمي؟

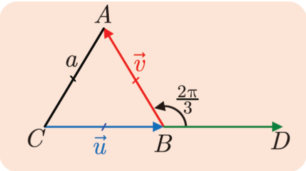
لأنَّه تصلح أيّ واحدة من العبارات المختلفة لهذا الجداء لتكون تعريفاً للجداء السلَّمي. وكلّما اتّخذنا واحدةً من تلك العبارات بمثابة التعريف، تمكنَّا من إثبات بقيّة العبارات. وقد اخترنا، هنا، العبارة $2\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$ لتعريفه، لأنّها تفيد في تقديم عرض بسيط وسريع ودقيق للجداء السلّمي.

مثال استعمال عبارات الجداء السُلّمي المختلفة

نهدف في كلٍّ من الحالات الآتية إلى حساب $\vec{u}\cdot\vec{v}$. اخترالعبارة الأكثر ملاءمة لإجراء هذا الحساب.



الحل



❶ لحساب $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BA}$. نلاحظ أنّ ABC مثلّث متساوي الأضلاع، طول ضلعه a يساوي نظيم كلٍ من $\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{BA}$. يبقى تعيينُ قياسٍ للزاوية الهندسية لهذين الشعاعين. إحدى الطرائق، هي أن نجعل للشعاعين $\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{BA}$ المبدأ نفسه. فننشئ النقطة D التي تُحقّق $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CB}$، بذا تكون الزاوية $\widehat{DBA}$ التي قياسها $\frac{2\pi}{3}$ زاوية الشعاعين $\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{BA}$. إذن

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BA}=a\times a\times\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{a^2}{2}$$

❷ لمّا كان $A(1,2)$ و $B(-1,0)$ و $C(3,-1)$، إذن مركّبتا $\overrightarrow{AB}$ هما $(-2,-2)$ ومركّبتا الشعاع $\overrightarrow{AC}$ هما $(2,-3)$. إذن

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(-2)\times(2)+(-2)\times(-3)=2$$

❸ الشعاع $\overrightarrow{AC}$ يساوي $\vec{u}+\vec{v}$ إذن، استناداً إلى التعريف،

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)=\frac{36-16-9}{2}=\frac{11}{2}$$

❹ النقاط O و A و B و C على استقامة واحدة، فالشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{OC}$ مرتبطان خطّياً، وباتجاهين متعاكسين، إذن:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}=-AB\times OC=-5\times 6=-30.$$

تدرّبْ

إحداثيّات الأشعّة والنقاط في هذا التدرّب هي في معلمٍ متجانسٍ $(O;\vec{i},\vec{j})$.

① احسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$ في كلٍّ من الحالات الآتية:

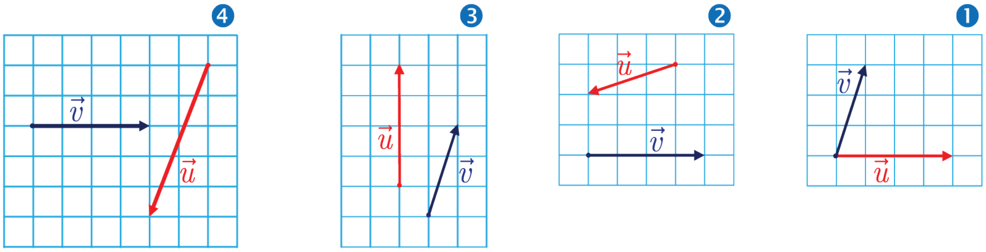
❶ $\|\vec{u}\|=1,\|\vec{v}\|=4,(\vec{u},\vec{v})=0$ ❷ $\|\vec{u}\|=2,\|\vec{v}\|=3,(\vec{u},\vec{v})=\pi$

❸ $\|\vec{u}\|=4,\|\vec{v}\|=5,\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$ ❹ $\|\vec{u}\|=21,\|\vec{v}\|=7,\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\dfrac{3\pi}{2}$

❺ $\vec{u}(2,3),\vec{v}(1,-1)$ ❻ $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j},\vec{v}=-\vec{i}+2\vec{j}$

❼ $\|\vec{u}\|=2,\|\vec{v}\|=3,\|\vec{u}+\vec{v}\|=3$ ❽ $\|\vec{u}\|=3,\|\vec{v}\|=4,\|\vec{u}+\vec{v}\|=5$

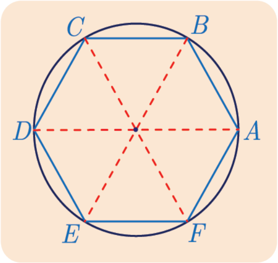
② وحدة قياس الأطوال في الأشكال الآتية هي a طول ضلع المربّع الصغير، احسب في كل حالة $\vec{u}\cdot\vec{v}$ بدلالة a.



③ في الشكل المجاور $ABCDEF$ مسدّسٌ منتظمٌ مرسومٌ في دائرة مركزها O ونصف قطرها 1. احسب:

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}$

و $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OE}$ و $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DF}$ و $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{DB}$ و $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{EF}$.



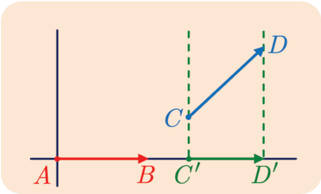
④ لدينا ثلاث نقاط $A(4,1)$ ، $B(0,5)$ ، $C(-2,-1)$.

❶ احسب AB و AC و BC. استنتج طبيعة المثلّث ABC.

❷ احسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. استنتج أنّ $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

2 الإسقاط القائم وقواعد الحساب

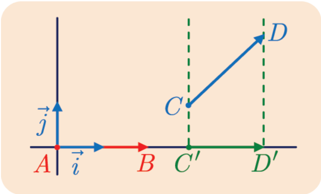
مُبرهَنة 3



إذا كان الشعاعُ $\overrightarrow{C'D'}$ المسقطَ القائم للشعاع $\overrightarrow{CD}$ على المستقيم الحامل للشعاع $\overrightarrow{AB}$، كان:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$$

الإثبات



نختار معلماً متجانساً $(A;\vec{i},\vec{j})$ يكون فيه الشعاعان $\vec{i}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطّياً. عندئذٍ مركّبتا $\overrightarrow{AB}$ هما $(x_B,0)$، ومركّبتا $\overrightarrow{CD}$ هما (x_D-x_C,y_D-y_C). أما مركّبتا $\overrightarrow{C'D'}$ فهما $(x_D-x_C,0)$ لأن $x_{D'}=x_D$، $x_{C'}=x_C$ و $y_{D'}=y_{C'}=0$. إذن

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=x_B(x_D-x_C) \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}=x_B(x_D-x_C)$$

فهذان المقداران متساويان، وبذا يتمُّ إثبات المطلوب.

مُبرهَنة 4

أيّاً كانت الأشعّة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$، وأيّاً كان العددان الحقيقيّان a و b، كان:

① $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

② $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

③ $(a\vec{u})\cdot(b\vec{v})=ab(\vec{u}\cdot\vec{v})$

لاحظ أيضاً أنّ الشرطين ① و ② يقتضيان $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$.

الإثبات

نختار معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j})$ ونفترض فيه أنّ $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{v}(x',y')$ و $\vec{w}(x'',y'')$.

① لمّا كان $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$ وكان $\vec{v}\cdot\vec{u}=x'x+y'y$، استنتجنا $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$.

② مركّبتا $\vec{v}+\vec{w}$ هما $(x'+x'',y'+y'')$، إذن

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})&=x(x'+x'')+y(y'+y'')\\&=(xx'+yy')+(xx''+yy'')=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}\end{aligned}$$

③ مركّبتا $a\vec{u}$ هما (ax,ay)، ومركّبتا $b\vec{v}$ هما (bx',by')، إذن

$$\begin{aligned}(a\vec{u})\cdot(b\vec{v})&=axbx'+ayby'\\&=ab\times(xx'+yy')=ab(\vec{u}\cdot\vec{v})\end{aligned}$$

وبذا يتمّ إثبات المبرهنة.

نتائج

- بوضع $a=-1$ و $b=1$ في القاعدة ③ نجد $(-\vec{u})\cdot\vec{v}=-(\vec{u}\cdot\vec{v})$. إذن

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(-\overrightarrow{BA})\cdot(-\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DC}$$

- من القاعدتين ① و ② نجد

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{z}+\vec{t})=\vec{u}\cdot\vec{z}+\vec{u}\cdot\vec{t}+\vec{v}\cdot\vec{z}+\vec{v}\cdot\vec{t}$$

مثال

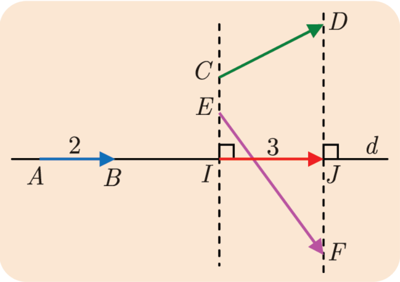
- $3\vec{u}\cdot(2\vec{v}+\vec{w})=(3\vec{u})\cdot(2\vec{v})+(3\vec{u})\cdot\vec{w}=6\vec{u}\cdot\vec{v}+3\vec{u}\cdot\vec{w}$
- $(\vec{u}-3\vec{v})\cdot(-2\vec{u}+\vec{w})=-2\vec{u}^2+\vec{u}\cdot\vec{w}+6\vec{u}\cdot\vec{v}-3\vec{v}\cdot\vec{w}$

تكريساً للفهم

لماذا نستعمل المساواة $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$ ؟

لأنّها كثيراً ما تسهّل حساب الجداء السُلَّمي. تجب الإشارة إلى أنَّ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{C'D'}$ مرتبطان خطّياً، فجداؤهما السُلَّمي يساوي $AB\times C'D'$ أو يساوي $-AB\times C'D'$.

مثال



في الشكل المجاور، الشعاع $\overrightarrow{IJ}$ مسقطٌ قائمٌ لكلٍّ من الشعاعين $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{EF}$ على المستقيم d. فعملاً بالمبرهنة 3. يكون

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ}$$

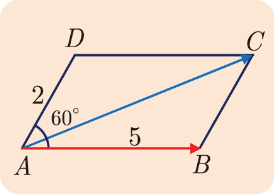
ولأنَّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{IJ}$ مرتبطان خطّياً وبالاتجاهِ نفسه، استنتجنا $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ}=AB\times IJ=2\times 3=6$.

ما الفائدة من هذه القواعد للحساب؟

- لأنّه بفضل هذه القواعد، يصبح الجداء السُلَّمي أداةً رياضية فعّالة. فهي منسجمة مع قواعد الحساب الشعاعي التي عُرِضت سابقاً. بوجه خاصّ، لحساب الجداء $\vec{u}\cdot\vec{w}$، من الملائم، كتابة $\vec{w}=\vec{v}+\vec{z}$ بناءً على علاقة شال، ومن ثمَّ استعمال القاعدة ② لمتابعة الحساب.

- علينا التزام الحذر عند التعامل مع الحساب الشعاعي، فهو مختلف في العديد من الأوجه عن الحساب العددي. على سبيل المثال، يمكن أن يكون $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ مع أنّ $\vec{u}\neq\vec{0}$ و $\vec{v}\neq\vec{0}$. كما إنَّ الشرطين $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{w}$ و $\vec{u}\neq\vec{0}$ **لا** يقتضيان $\vec{v}=\vec{w}$.

مثال كيف نستفيد من قواعد الحساب؟



في الشكل المجاور، $ABCD$ متوازي أضلاع فيه $AB = 5$ ، $AD = 2$ و $\widehat{DAB} = 60°$. احسب الجداء السُلَّمي $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

الحل

الشعاع $\overrightarrow{AB}$ معلومٌ، ولكن الشعاع $\overrightarrow{AC}$ غير معلوم، كما هي الزاوية $\widehat{BAC}$. فمن غير الممكن حساب $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ باعتمادٍ مباشر للتعريف أو بتطبيق بسيط لإحدى المبرهنات. كما يبدو أنَّ اللجوء إلى معلم متجانس سيقودنا إلى حلٍّ طويل. ولكنّ $ABCD$ متوازي أضلاعٍ، إذن $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ، إذن

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$
$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$$

ولكن $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB \times AB = 25$ ، لأنَّ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطّياً ولهما الاتجاهِ نفسه. وكذلك $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos 60° = 5 \times 2 \times \frac{1}{2} = 5$. إذن $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 25 + 5 = 30$.

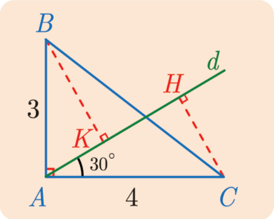
تَدَرَّبْ

① $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان نظيماهما بالترتيب 4 و 6 وجداؤهما السُلَّمي يساوي 8 . احسب كلّاً من المقادير

$$A = \vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \qquad B = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}), \quad C = 2\vec{u} \cdot (-4\vec{v}),$$
$$D = (\vec{u} + \vec{v})^2, \quad E = (2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (3\vec{u} - 2\vec{v})$$

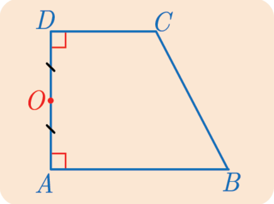
② ليكن الشعاعان $\vec{u}(2,-1)$ و $\vec{v}(3,6)$.

1. احسب $\vec{u} \cdot \vec{v}$ و $\vec{u}^2$ و $(3\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - 2\vec{v})$ و $(\vec{u} + \vec{v})^2$ و $(\vec{u} - \vec{v})^2$.
2. استنتج قيمة كلٍّ من $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ و $\|\vec{u} - \vec{v}\|$.



③ في الشكل المجاور، المثلّث ABC مثلثٌ قائمٌ في A ، فيه $AC = 4$ ، و $AB = 3$ و $\widehat{CAH} = 30°$. النقطتان H و K هما بالترتيب مسقطا C و B على d . احسب الجداءات السلّمية الآتية:

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH}$ و $\overrightarrow{KB} \cdot \overrightarrow{HC}$



④ $ABCD$ شبه منحرف قائم في A و D ، O منتصف $[AD]$. نضع $AB = a$ و $DC = b$ و $AO = c$.

1. لماذا $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = ab$ و $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = -c^2$ ؟
2. اكتب $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC}$ لتستنتج أنَّ $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = ab - c^2$

تطبيقات

1.3.الجداء السُلَّمي والمسافة

رأينا أنّه، عندما يكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطّياً ومتّفقين بالاتّجاه، يكون $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$. وفي حالة $\vec{u} = \vec{v}$ نجد $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|^2$. إذن $\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$. بهذا يدلُّ الرمز $\overrightarrow{AB}^2$ على $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$ أي على AB^2. نكتبُ إذن

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2$$

نتائج

جداءاتٌ سُلَّميةٌ مُلفتةٌ:

لدينا

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = (\vec{u}+\vec{v})^2$$

وبناءً على قواعد حساب الجداء السُلَّمي نجد:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

ونجد بأسلوب مماثل أنّ

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (\vec{u}-\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

وأنّ

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

- يدلُّ الرمز $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2$ على $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$، فهو يدلّ إذن على $AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
- وكذلك $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}) = AB^2 - AC^2$.

2.3.الجداء السُلَّمي والتعامد

تعريف 2

ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين غير معدومين. القول إنَّ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين، يكافئ القول «إذا كان $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$، كان المستقيمان (AB) و (CD) متعامدين».

نصطلح أنّ الشعاع $\vec{0}$ عموديٌّ على كلّ شعاعٍ آخر.

مُبرهَنة 5

القولُ «الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان» يكافئُ القولَ « $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ ». فالقولُ « (AB) و (CD) متعامدان» يكافئُ القول « $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ ».

الإثبات

- في حالة $\vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{v}=\vec{0}$، تكافؤ القولين محقّقٌ وضوحاً.
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$. ولأنَّ $\|\vec{u}\|\neq 0$ و $\|\vec{v}\|\neq 0$، في حالة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير معدومين، استنتجنا $\cos(\vec{u},\vec{v})=0$، أي $(\vec{u},\vec{v})=\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $(k\in\mathbb{Z})$، فالشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان.

نتيجة

في معلمٍ متجانس، الجداء السُلّمي لشعاعين $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{v}(x',y')$ يساوي $xx'+yy'$، إذن:

« $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان » يكافئ « $xx'+yy'=0$ »

ملاحظة مهمة: إذا تأمّلنا شعاعاً $\vec{u}(x,y)$ في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، كان

$$x=\vec{u}\cdot\vec{i} \quad \text{و} \quad y=\vec{u}\cdot\vec{j}$$

في الحقيقة، $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$، ومنه

$$\vec{u}\cdot\vec{i}=(x\vec{i}+y\vec{j})\cdot\vec{i}=x(\vec{i}\cdot\vec{i})+y(\vec{j}\cdot\vec{i})$$

ولكن $\vec{i}\cdot\vec{i}=1$ و $\vec{j}\cdot\vec{i}=0$ لأنّ $\vec{i}$ و $\vec{j}$ متعامدان، إذن $x=\vec{u}\cdot\vec{i}$. ونجد بالمُماثَلة أنّ $y=\vec{u}\cdot\vec{j}$.

تكريساً للفهم

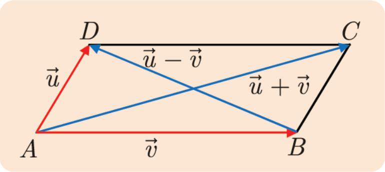
كيف نستفيد من الجداءات السلميّة المُلفتة ؟

وجدنا أنَّ $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$ و $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$

بجمع العلاقتين السابقتين طرفاً إلى طرف نجد:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=2(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2)$$

التي تسمّى **متطابقة متوازي الأضلاع**.



لأنّه في متوازي أضلاعٍ $ABCD$، إذا وضعنا $\overrightarrow{AD}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}=\vec{v}$، كان

$$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC} \quad \text{و} \quad \vec{u}-\vec{v}=\overrightarrow{BD}$$

إذن

$$AC^2+BD^2=2(AD^2+AB^2)$$
$$=AD^2+BC^2+AB^2+DC^2$$

أي إنَّ : **مجموع مربّعي قطري متوازي أضلاعٍ يساوي مجموعَ مربّعات أضلاعه الأربعة.**

مثال كيف نستفيد من الجداء السُلّمي لإثبات تعامد مستقيمين؟

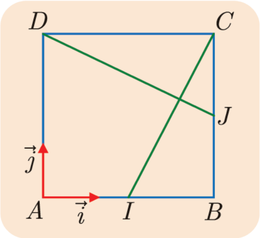
$ABCD$ مربعٌ طول ضلعه يساوي a، I و J هما على التوالي منتصفا ضلعيه $[AB]$ و $[CD]$. أثبت أنَّ المستقيمين (DJ) و (CI) متعامدان.

لإثبات تعامد مستقيمين (MN) و (EF)، يكفي إثبات أنَّ $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$.

الحلّ

▪ الحلّ باستعمال معلمٍ متجانس

عندما يحتوي شكلٌ على زوايا قائمة، يقود استعمال معلمٍ متجانس، إلى حلٍّ سريع أحياناً.



$ABCD$ مربَّعٌ، نختار المعلم المتجانس $(A;\vec{i},\vec{j})$، فيكون في هذا المعلم $B(a,0)$ و $D(0,a)$ و $C(a,a)$. إذن يكون $I(\frac{a}{2},0)$ و $J(a,\frac{a}{2})$.
وتكون من ثَمّ مركّبات الشعاعين $\overrightarrow{CI}$ و $\overrightarrow{DJ}$ بالترتيب : $(-\frac{a}{2},-a)$ و $(a,-\frac{a}{2})$.
إذن $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{DJ} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$. فالمستقيمان (CI) و (DJ) متعامدان.

▪ الحلّ باستعمال علاقة شال وقواعد حساب الجداء السُلّمي

سنستعمل علاقة شال للحصول على أشعّة متعامدة تقود إلى انعدام جدائها السُلَّمي.

يمكننا كتابة

$$\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{DJ} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BI}) \cdot (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CJ})$$

وعليه

$$\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{CJ}$$

ولكن $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$ لأن $\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{DC}$ متعامدان، وكذلك $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{CJ} = 0$، إذن

$$\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{DC}$$

الشعاعان $\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{CJ}$ مرتبطان خطّياً وباتّجاهٍ واحد ، إذن

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CJ} = CB \times CJ = a \times \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2}$$

الشعاعان $\overrightarrow{BI}$ و $\overrightarrow{DC}$ مرتبطان خطّياً وباتجاهين مختلفين، إذن

$$\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{DC} = -BI \times DC = -a \times \frac{a}{2} = -\frac{a^2}{2}$$

ومنه $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{DJ} = 0$، والمستقيمان (CI) و (DJ) متعامدان.

تدرَّبْ

① نتأمّل في معلمٍ متجانس النقاط $A(0,1)$ و $B(5,4)$ و $M(m,0)$. و m عددٌ حقيقي. احسب $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ بدلالة m. ثُمّ استنتج قيم m ليكون المثلّث AMB قائم الزاوية في M.

② نتأمّل في معلمٍ متجانس النقاط $A(2,2)$ و $B(-3,-3)$ و $C(2,-3)$. H هي المسقط القائم للنقطة B على محور الفواصل، و K هي المسقط القائم للنقطة A على محور التراتيب. أثبت أنَّ المستقيمين (OC) و (HK) متعامدان.

③ $ABCD$ متوازيُ أضلاعٍ فيه $AB=4$ و $AD=2$ و $\widehat{BAD}=60°$.

1. أثبت أنَّ $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2=28$ و $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})^2=12$.
2. استنتج الطولين AC و BD.

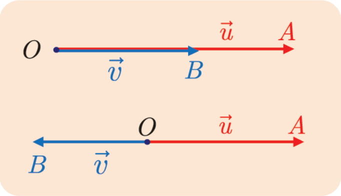
أفكار يجب تَمثُّلها

- الجداء السُلَّمي $\vec{u}\cdot\vec{v}$ عددٌ حقيقيّ يمكن حسابه بأربعِ طرائقَ، هي:
  - $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$
  - $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$
  - $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$، في حالة $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{v}(x',y')$
  - $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$ في حالة $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{C'D'}$ هو المسقط القائم للشعاع $\overrightarrow{CD}$ على المستقيم (AB).
- في حالة شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطّياً:
  - إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ بالاتّجاه نفسه، كان

    $$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$$

  - إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ باتّجاهين متعاكسين، كان

    $$\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$$



- لا يتغيّر الجداء السُلّمي لشعاعين إذا اُستبدِل بأحدهما مسقطه القائم على الآخر.
- للتعامل مع الجداء السُلّمي ثمّة ثلاث قواعد حسابيّة وفقط ثلاث:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$$

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$

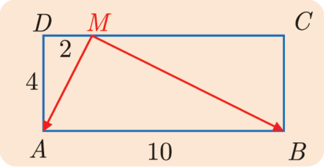
$$(a\vec{u})\cdot(b\vec{v})=(ab)(\vec{u}\cdot\vec{v})$$ (a و b حقيقيان)

- يستعمل الجداء السلّمي في:
  - إثبات تعامد مستقيمين لأنّ $(AB) \perp (CD)$ يكافئ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.
  - حساب الأطوال لأنّ $AB^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$.
  - حساب تجيب زاوية هندسيّة: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$.

منعكسات يجب امتلاكُها

- لحساب الجداء السُلَّمي لشعاعين، عندما يتعذّر التطبيق المباشر للصيَغ المألوفة، لا تتردّدْ في تحليل واحد من الشعاعين (أو كليهما) وفق **علاقة شال**. حاول الحصولَ، في سياق عملك، على جداءات سلمية معدومة.

مثال



$ABCD$ هو المستطيلُ المرسوم جانباً. لحساب $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$،
نستفيد من كون $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$، و $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ بأن نكتب :

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB}$$

فيكون

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA}) \cdot (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB}) \\ &= \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB} \end{aligned}$$

ولأنّه لدينا $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ و $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$ و $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MC} = -MD \times MC = -16$
و $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB} = 4 \times 4 = 16$، استنتجنا $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -16 + 16 = 0$.

- لحساب مسافة، فكِّرْ في حساب $\overrightarrow{AB}^2$ أي $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$.
- لحساب طولِ BC حيث $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$، فكِّر في حساب $(BC)^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2$، فيكون $BC^2 = BA^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + AC^2$.
- لا تنسَ إمكان أن تستبدل بأحد الشعاعين مسقطه القائم على الآخر.
- لا تنسَ أنَّ استعمال معلمٍ، يمكن أنْ يكون مفيداً للإثبات. يجب أن تختار المعلم متجانساً كي تتمكن من حساب المسافات.

أخطاءٌ يجبُ تجنُّبها

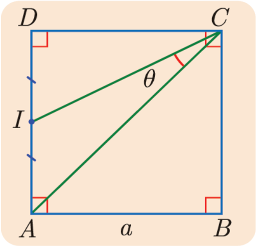
- عند التعامل مع الجداء السُلَّمي، لا تستعملْ معلماً غيرَ متجانسٍ.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ لا يقتضي $\vec{v} = \vec{w}$.

ولكنَّ المساواة $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ تكافئ $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = 0$. إذن $\vec{u}$ و $(\vec{v} - \vec{w})$ متعامدان.

أنشطة

نشاط 1 حساب المسافات والزوايا

❶ زاوية صامدة في المربع.



$ABCD$ مربعٌ طولُ ضلعه a، النقطة I هي منتصف القطعة $[DA]$. نهدف إلى إثبات أنَّ الزاوية $\theta = \widehat{ACI}$ هي ذاتها في جميع المربّعات، هذا يعني أنّ قياسها لا يتعلّق بطول ضلع المربّع.

لهذا، نحسب أولاً $\cos\theta$ بمساعدة الجداء السُلّمي.

1. أثبت أنَّ $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{\sqrt{10}}{2} a^2 \times \cos\theta$.
2. أثبت أنَّ $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD})$، ومن ثَمَّ أنّ $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{3}{2} a^2$.
3. استنتج العدد $\cos\theta$، ثمَّ أوجد قياس θ لأقرب درجة. (يمكن استعمال الآلة الحاسبة).

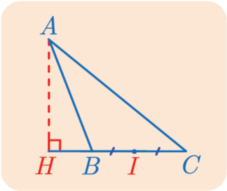
❷ زاوية مستقيمين

d و d' مستقيمان في معلمٍ متجانسٍ $(O;\vec{i},\vec{j})$، معادلتاهما بالترتيب $y = x - 1$ و $y = -2x + 3$.
و θ هي الزاوية الحادّة التي ضلعاها المستقيمان d و d'. أي ما يسمى **زاوية المستقيمين** d و d'.

1. ارسم هذين المستقيمين في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.
2. لماذا يكون الشعاعان $\vec{u}(1,1)$ و $\vec{v}(1,-2)$ شعاعي توجيه d و d' على التوالي؟
3. احسب $\cos(\vec{u},\vec{v})$ واستنتج $\cos\theta$، ثمَّ أعطِ قيمةً تقريبيّة للزاوية θ.

نشاط 2 خاصّة مميّزة للمثلّث القائم

❶ صيغٌ عدَّة للجداء السُلَّمي نفسه



ABC مثلّث، و H هو المسقط القائم للرأس A على (BC) و I هو منتصف $[BC]$. نريد عرض طرائق مختلفة لحساب الجداء السُلَّمي $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

1. استفد من العلاقتين $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}$ و $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}$ لإثبات العلاقة ① الآتية:
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}^2 + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}$.
2. a. استفد من العلاقة $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ لإثبات العلاقة ② الآتية:
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC}$$
b. أثبت أنَّ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.
c. أثبت بالمثل العلاقة ③ الآتية : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CB}$.
3. استفد من العلاقتين $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}$ و $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}$ لإثبات العلاقة ④ الآتية :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AI^2 - IB^2$.

❷ خاصّة مميِّزةٌ للمثلّث القائم

.1 القولُ «المثلّث ABC قائمٌ في A» يكافئ القولَ «$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$». استنتج من الفقرة ❶ تكافؤ الخواص الآتية :

(■) «المثلّث ABC قائمٌ في A»

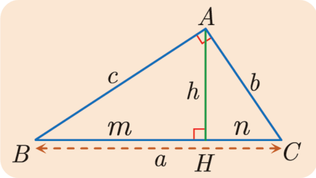
(▲) «$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BH}=BA^2$»

(●) «$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CH}=CA^2$»

(◆) «$\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=-AH^2$»

وأخيراً أثبت ABC قائمٌ في A إذا وفقط إذا كان «$IA=IB=IC$» إذ I منتصف $[BC]$.

.2 **تطبيق** : ABC مثلّثٌ قائمٌ في A.

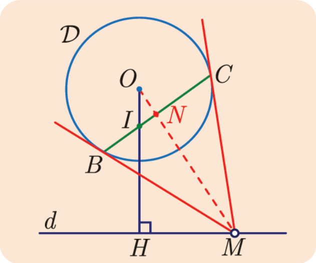


.a بالاستعانة برموز الشكل جانباً، استنتج من الأسئلة السابقة أنَّ :

$$h^2=mn \text{ و } b^2=an \text{ و } c^2=am$$

.b نعطي $n=3$ و $h=\sqrt{3}$، احسب a و b و c.

نشاط 3 المحل الهندسي والجداء السُلّمي



$\mathcal{D}$ دائرةٌ مركزها O ونصفُ قطرها r، و H نقطةٌ تحقّقُ $OH=2r$، و d هو المستقيم المارّ بالنقطة H عمودياً على (OH). وأخيراً M نقطةٌ متحركة ترسمُ d. نرسمُ من M مماسين للدائرة $\mathcal{D}$ يمسانها في B و C. يقطعُ المستقيمُ (OM) المستقيمَ (BC) في N. نريد إيجاد المحلّ الهندسي للنقطة N عندما ترسمُ M المستقيم d.

❶ تخمين المحل الهندسي

N هي نقطة تقاطع (BC) و (OM) و I هي نقطة تقاطع (BC) و (OH). لاحظ أنّ الزوايا $\widehat{ONB}$ و $\widehat{ONC}$ و $\widehat{ONI}$ زوايا قائمة لأنَّ (OM) هو محور $[BC]$.

.1 أعد الرسم في دفترك واختر عدّة نقاط M_1 و M_2 و ... ما قولك بشأن النقطة I؟

.2 بافتراض أنّ I لا تتعلّق بموضع النقطة M. أثبت أنّ النقطة N ترسم الدائرة $\mathcal{D}'$ التي قطرها $[OI]$.

❷ التحقّق من صحّة التخمين بالإثبات

لنبرهن أولاً أنَّ I هي نقطة ثابتة لا تتعلّق بموضع النقطة M على d.
النقطة I هي نقطة من المستقيم الثابت (OH). لإثبات أنها ثابتة على هذا المستقيم، يكفي إثبات أنَّ $\overrightarrow{OI}$ و $\overrightarrow{OH}$ مرتبطان خطّياً وباتّجاهٍ واحدٍ وأنَّ طول OI ثابت. ولكنّ OH ثابتٌ، علينا إذن الاهتمامُ بالجداء السُلّمي $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OH}$.

1. أثبت أنَّ :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OI} \\ &= \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} \\ &= \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OC} = OC^2 = r^2\end{aligned}$$

2. استنتج أنَّ:
   a. I هي نقطة ثابتة من القطعة المستقيمة $[OH]$.
   b. I هي داخل الدائرة $\mathcal{D}$.
   c. N هي نقطةٌ من الدائرة $\mathcal{D}'$ التي قطرها $[OI]$.

❸ دراسة العكس

تبقى الإجابة عن السؤال الآتي: هل كل نقطة N من $\mathcal{D}'$ تقابلها نقطةٌ M من d؟

1. ارسم شكلاً جديداً. ووضّعْ عليه فقط العناصر الثابتة: $\mathcal{D}', H, I, d, \mathcal{D}$. لماذا تقع $\mathcal{D}'$ داخل $\mathcal{D}$ ؟
2. لتكن N نقطةً من $\mathcal{D}'$ مختلفة عن O، ارسمْ (NI) فيقطع $\mathcal{D}$ في B و C، ارسمْ مماسَي $\mathcal{D}$ من B و C فيتقاطعان في M. علينا إثبات أنَّ M تقع على d. لتكن K المسقط القائم للنقطة M على (OH). أثبت أنَّ $H = K$.
3. تفحَّص حالة وقوع N على O. استنتج المحلّ الهندسي للنقطة N.

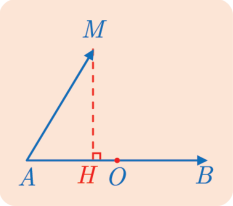
نشاط 4 مجموعة نقاط والجداء السُلّمي

نُعطى نقطتين A و B، ولتكن O منتصف القطعة $[AB]$. نضع $AB = 2d$. نقرن بكل نقطةٍ M من المستوي عدداً حقيقياً $f(M)$. نكون بذلك قد عرَّفنا تابعاً $M \mapsto f(M)$ من المستوي إلى مجموعة الأعداد الحقيقيّة $\mathbb{R}$. ليكن من جهة أخرى عدداً حقيقيّاً ثابتاً k. نهدف إلى تعيين مجموعة جميع النقاط M التي تحقّق $f(M) = k$ في بعض الحالات الخاصّة.

❶ دراسة حالة التابع $f : M \mapsto \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$

لدينا هنا $f(M) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$ و C_k هي مجموعة النقاط M التي تحقّقْ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k$.

1. لتكن M من C_k، وليكن H المسقط القائم للنقطة M على المستقيم (AB).



a. تحقّقْ صحّة المساواة $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = k$.

b. استنتج أنَّ H تنتمي إلى C_k وأنَّ $AH = \frac{|k|}{2d}$.

c. بيِّنْ، تبعاً لإشارة k، موضع H على المستقيم (AB).

d. استنتج من الأسئلة السابقة أنَّ M نقطةٌ من مستقيمٍ ثابتٍ Δ.

2. في السؤال السابق، أثبتنا أنَّه إذا كانت M نقطةً من C_k، كانت إذن نقطةً من Δ. لإثبات أنَّ $\Delta = C_k$، يجب الإجابة عن السؤال : أَكلُّ نقطةٍ من Δ هي نقطةٌ من C_k؟
أثبت أنَّه إذا كانت N على Δ، كانت N من C_k، ثم أنجز إثبات المطلوب.

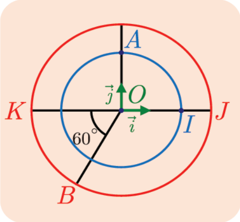
❷ دراسة حالة التابع $f : M \mapsto \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$

نبحث عن C_k مجموعة النقاط M التي تحقّق $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$.

1. أثبت أنَّ تعيين C_k يؤول إلى إيجاد مجموعة النقاط M التي تحقّق $MO^2 - d^2 = k$.
   لاحظ أنّ $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}$.
2. عيّن المجموعة C_k. باتّباع أسلوب الفقرة السابقة.
   ناقش تبعاً لإشارة $k + d^2$.
3. ارسم C_k في حالةِ $AB = 6$ و $k = 16$.

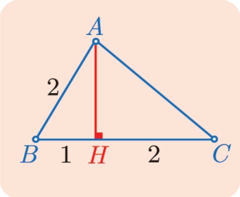
تمرينات ومسائل

إحداثيّات الأشعّة والنقاط في تمارين هذا البحث هي في معلمٍ متجانسٍ $(O;\vec{i},\vec{j})$.



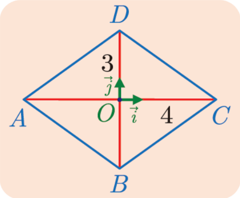
1 في الشكل دائرتان متمركزتان في O، نصفا قطريهما 2 و 3.

1. احسب $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OJ}$ و $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OK}$ و $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}$.
2. باستعمال إحداثيّات النقاط في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$، احسب $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AI}$ و $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BA}$.



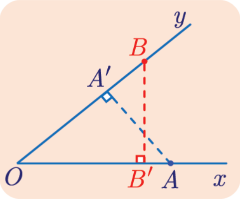
2 باستعمال المعلومات المبيّنة في الشكل المجاور:

1. احسب $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{BH}$، $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}$، $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH})\cdot\overrightarrow{AB}$، $(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC})\cdot\overrightarrow{AB}$، $(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB})\cdot(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC})$
2. أثبت $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=3$ و $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BH}=-2$.



3 $ABCD$ معينٌ مركزه O. $OA=4$ و $OB=3$.

1. احسب $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$.
2. باستعمال المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$، احسب:
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}$.



4 في الشكل المجاور، A نقطةٌ من نصف المستقيم $[Ox)$ و A' مسقطها القائم على نصف المستقيم $[Oy)$ كما إنَّ B نقطةٌ من $[Oy)$ و B' مسقطها القائم على $[Ox)$.

1. بيّن أنَّ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$.
2. لماذا $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB}$؟

5 A و B نقطتان، d هو المستقيم المارّ بالنقطة B عموديّاً على (AB)، و M نقطةٌ ما من d.

1. أثبت أنّ $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2$ بعد استعراض المبرهنة الملائمة لاستعمالها في الإثبات.
2. بالعكس: إذا كانت M نقطةً تحقّق $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2$، أثبت أنّ M هي نقطةٌ من d.

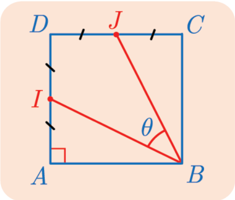
6 يقطعُ المستقيمُ d الذي معادلته $y=2x+3$ محورَ الفواصل في النقطة A ويقطع محور التراتيب في النقطة B ويقطعُ المستقيم d' الذي معادلته $y=-x-3$ في النقطة C.

1. احسب إحداثيّات A و B و C.
2. استنتج قيمة الجداء السلّمي $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

7 لتكن I نقطةً من القطعة المستقيمة $[AB]$، ولنفترض أنّ $AB = 4$ و $AI = 3$. وليكن d المستقيمَ العموديّ على (AB) في النقطة I. ولتكن C نقطةً تُحقِّق الشرطين $AC = 5$ و $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12$.

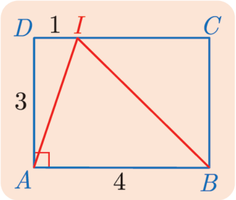
1. أثبت أنّ C نقطةٌ من المستقيم d.
2. تحقَّق أنَّ النقطة C نقطةٌ من الدائرة D التي مركزها A ونصفُ قطرها 5.
3. ما عدد النقاط C التي تحقّق $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12$ و $AC = 5$؟ احسب في كلّ حالة $\cos \widehat{BAC}$.

8 $ABCD$ مربعٌ طول ضلعه a، I و J هما بالترتيب منتصفا ضلعيه $[AD]$ و $[DC]$. وليكن θ قياس الزاوية $\widehat{IBJ}$.



1. تحقَّق أنّ $BI = BJ = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
2. استنتج أنَّ $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BJ} = \dfrac{5}{4}a^2 \cos\theta$.
3. اكتب $\overrightarrow{BI}$ و $\overrightarrow{BJ}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ ثم استنتج أنَّ $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BJ} = a^2$ واحسب θ لأقرب درجة.

9 $ABCD$ مستطيلٌ ، I نقطةٌ من $[DC]$ معرّفةٌ كما في الشكل.



1. أثبت أنَّ

$$(\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DA}) \cdot (\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{IC} + DA^2$$

2. استنتج أنَّ $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = 6$ و $\cos \widehat{AIB} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

10 نتأمّل معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب $(2\vec{i} - \vec{j}) \cdot (\vec{i} + \vec{j})$، $(\vec{i} - \vec{j}) \cdot (\vec{i} + 2\vec{j})$.
2. نفترض أنّ $\vec{u} \cdot \vec{i} = 3$ و $\vec{u} \cdot \vec{j} = 2$ و $\vec{v} \cdot \vec{i} = 1$ و $\vec{v} \cdot \vec{j} = 5$.

① احسب مركّبات الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

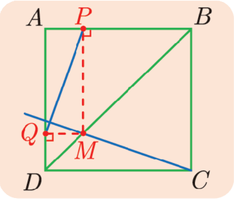
② استنتج قيمة $2\vec{u} \cdot (\vec{u} - 3\vec{v})$، $(\vec{u} + \vec{v})^2$ و $(\vec{u} - 2\vec{v})^2 - (\vec{u} + 3\vec{v})^2$.

11 احسب $\vec{u} \cdot \vec{v}$ بدلالة m ثمّ عيِّن العدد الحقيقي m ليكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين وذلك في كلٍّ من الحالات الآتية :

1. $\vec{u}(-5,2)$ و $\vec{v}(m,-2)$.
2. $\vec{u}(m,3-m)$ و $\vec{v}(2,-m)$.
3. $\vec{u}(m-4,2m+1)$ و $\vec{v}(2m,3-m)$.

لنتعلّم البحث معاً

12 إثبات تعامد مستقيمين



$ABCD$ مربّعٌ طول ضلعه a، و M نقطة من $[BD]$ مسقطاها القائمان على المستقيمين (AB) و (AD) هما P و Q على الترتيب.

أثبت تعامد المستقيمين (PQ) و (MC) دون استعمال مَعلم.

نحو الحلّ

لنستخلص بعض النتائج من الشكل والافتراضات.

1. ما طبيعة كلٍّ من المثلّثين MPB و MQD.
2. علّل صحّة ما يأتي $AQ = MP = PB$ و $AP = QM = QD$.

لإثبات تعامد المستقيمين (CM) و (PQ)، يمكننا مثلاً إثبات أنّ $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{CM} = 0$. ولكن ليس لدينا صيغة تفيد في حساب هذا الجداء السلمي مباشرة. لذلك نفكّر بتحليل كلٍّ واحدٍ من هذين الشعاعين، أو أحدهما فقط وذلك سعياً وراء الاستفادة من التعامد المعروف لبعض الأشعّة مثل $\overrightarrow{AQ}$ و $\overrightarrow{CD}$،... ومن المساقط القائمة لبعض الأشعّة فمثلاً المسقط القائم للشعاع $\overrightarrow{CM}$ على (DA) هو $\overrightarrow{DQ}$.

1. علّل صحّة المساواة $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP}$. واستنتج أنّ

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CM}$$

2. أثبت أنّ

❶ $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{DQ} = -AQ\times DQ$

❷ $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CM} = -BP\times AP$

3. ماذا تستنتج؟

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

13 أشعّة تُعامِد شعاعاً مُعطى

نُعطى في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ شعاعاً غير معدوم $\vec{u}(a,b)$. أثبت تكافؤ الخاصّتين الآتيتين:

❶ $\vec{v}$ عمودي على $\vec{u}$

❷ مركّبتا الشعاع $\vec{v}$ هما $(-kb,ka)$ حيث k من $\mathbb{R}$.

تطبيق: جد الأشعّة $\vec{v}$ التي نظيمها يساوي 1 والعموديّة على الشّعاع $\vec{u}(2,-3)$.

نحو الحلّ

لإثبات تكافؤ خاصّتين نناقش على مرحلتين:

- نفترض أنّ $\vec{v}$ عموديّ على $\vec{u}$ ونبرهن على وجود عدد حقيقي k بحيث تكون مركّبتا الشعاع $\vec{v}$ هما $(-kb, ka)$.
- وبالعكس، إذا كان $\vec{v}(-kb, ka)$، حيث k عدد حقيقي، كان الشّعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين.

1. لنفترض إذن أنّ $\vec{v}(x,y)$ عموديّ على $\vec{u}$. أثبت أنّ $ax + by = 0$. واستنتج المطلوب مُناقشاً حالة $a = 0$ وحالة $a \neq 0$.
2. أثبت الآن أنّ $\vec{v}(-kb, ka)$ عموديّ على $\vec{u}$.

التطبيق: استناداً إلى ما سبق. إذا كان $\vec{u}(a,b)$ كان الشعاع $\vec{w}(-b,a)$ عموديّاً على $\vec{u}$ وكان كلُّ شعاع عموديّ على $\vec{u}$ من الشكل $\vec{v} = k\vec{w}$. وعلينا هنا إيجاد هذه الأشعّة التي نظيمها يساوي 1.

1. أثبت أنّ $\vec{v} = k\vec{w}$ حيث $\vec{w} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.
2. استنتج أنّ $\|\vec{v}\| = |k| \times \|\vec{w}\|$.
3. احسب $\|\vec{w}\|$ واستنتج قيم k التي تجعل $\|\vec{v}\| = 1$. واستنتج المطلوب.

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

14 علاقة أولر وتطبيق عليها

نُعطى أربع نقاط A و B و C و D. أثبت العلاقة ❶ الآتية

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$$

واستنتج تلاقي ارتفاعات المثلّث في نقطة واحدة.

نحو الحلّ

اللافت في هذا التمرين هو عدم وجود افتراضات على الإطلاق. لذلك أمامنا أسلوبان :

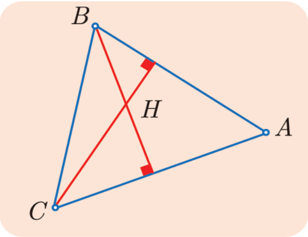
- استعمال معلم متجانس، وهنا يمكن اختيار إحدى النقاط الأربع مبدأ، واختيار إحدى النقاط الثلاث الأخرى على محور التراتيب وذلك تسهيلاً للحساب.
- استعمال علاقات شال بأسلوب مناسب بهدف تحويل الطرف الأيسر والوصول إلى 0.

1. لاحظ أنّ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ واستنتج أنّ الطرف الأيسر من ❶ يُكتب

$$\overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC})$$

2. استنتج المطلوب.

✌ بقي أن نثبت تلاقي ارتفاعات المثلّث في نقطة واحدة. لنتأمّل الشكل المجاور الذي رسمنا فيه المثلّث ABC والارتفاعين النّازلين من B و C اللذين يتقاطعان في النقطة H. لإثبات تلاقي الارتفاعات الثلاثة يكفي أن نثبت أنّ المستقيمين (AH) و (BC) متعامدان.



استفد من ❶ لإثبات تعامد المستقيمين (AH) و (BC).

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

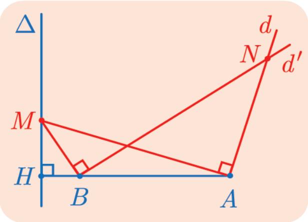
15 إيجاد محل هندسي تحليلياً

نُعطى ثلاث نقاط A و B و H واقعة على استقامة واحدة، نفترض أنّ B تقع بين A و H وأنّ $AB = 4$ و $BH = 1$. المستقيم Δ هو المستقيم المار بالنقطة H عمودياً على (AB). النقطة M نقطة مختلفة عن H تتحوّل على Δ. عندئذ يتقاطع المستقيم d المارّ بالنقطة A عمودياً على (AM) مع المستقيم d' المار بالنقطة B عمودياً على (BM) بالنقطة N.

بالاستعانة بمعلم متجانس مناسب عيّن المحلّ الهندسي للنقطة N عندما تتحوّل M على Δ محذوفاً منه H.

نحو الحلّ

✍ لننشئ الشكل المناسب ولنضع عليه العناصر الثابتة باللّون الأزرق والعناصر المتحوّلة باللّون الأحمر.



1. اختر عدداً من النقاط M وأنشئ بعناية النقاط N الموافقة.
2. ماذا تقترح بشأن المحلّ الهندسي المطلوب ؟

✌ نختار معلماً متجانساً مناسباً يكون فيه للمستقيم Δ معادلةً بسيطة. نختار إذن المعلم $(H;\vec{i},\vec{j})$ الذي تكون فيه $(1,0)$ إحداثيّتي النقطة B.

1. ما هي إحداثيّات النقطتين H و A ؟
2. وما هي معادلة المستقيم Δ ؟

✍ لإيجاد مجموعة النقاط N نبحث عن الإحداثيّات (x,y) لهذه النقاط بدلالة إحداثيّات M. لمّا كانت M تتحوّل على المستقيم Δ محذوفاً منه H، كانت فاصلة M مساوية 0 وكان ترتيبها أي عدد غير معدوم وليكن m.

1. بالاستفادة من تعامد $\overrightarrow{BM}$ و $\overrightarrow{BN}$، ومن تعامد $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AN}$ أثبت أنّ $N(x,y)$ تُحقّق المعادلتين : $my = x - 1$ و $my = 5x - 25$ ؟
2. استنتج إحداثيّات N، وبيّن أنّ N تنتمي إلى مستقيم ثابت Δ'، أعطِ معادلته.

3. إذن المحلّ الهندسي للنقاط N محتوى في المستقيم Δ'، وعلينا أن نتبيّن إذا كانت النقطة N ترسم كامل المستقيم Δ'. استنتج المطلوب بعد ملاحظة أنّه عندما ترسم m كامل المجموعة $\mathbb{R}^*$ يرسم المقدار $\frac{5}{m}$ المجموعة نفسها.

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

قُدُماً إلى الأمام

16 لتكن H نقطة تلاقي ارتفاعات مثلّث ABC.

1. أثبت أنَّ $AB^2 = AH^2 + HB^2 + 2\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HB}$

وأنَّ $AC^2 = AH^2 + HC^2 + 2\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC}$

2. استنتج أنَّ $AB^2 - AC^2 = HB^2 - HC^2$.

17 قوة نقطة بالنسبة إلى دائرة

لتكن $\mathcal{C}$ الدائرةَ التي مركزُها O ونصفُ قطرها R، ولتكن M نقطة لا تقعُ على $\mathcal{C}$. يمرُّ مستقيمان بالنقطة M، يقطع أحدُهما الدائرة $\mathcal{C}$ في A و B، ويقطعها الآخر في C و D. نهدف إلى إثبات أنَّ $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$. لتكن A' النقطة المقابلة قطريّاً للنقطة A.

1. ارسم شكلين، تكون M في أحدهما داخل الدائرة $\mathcal{C}$، وخارجها في الآخر.
2. أثبت أنَّ $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'}$.
3. أثبت أنَّ $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = MO^2 - R^2$، ثمَّ استنتج أنَّ

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$$

إذن لا يتعلّق الجداء السلّمي $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ إلّا ببعد النقطة M عن مركز الدائرة، إذ يساوي $MO^2 - R^2$. يسمّى هذا العدد **قوةَ النقطة M بالنسبة إلى الدائرة $\mathcal{C}$**. وهو موجبٌ تماماً عندما تقعُ M خارج الدائرة وسالب تماماً عندما تقعُ M داخلها.

18 ABC مثلّثٌ، فيه I منتصف $[BC]$، و H المسقط القائم للنقطة A على $[BC]$.

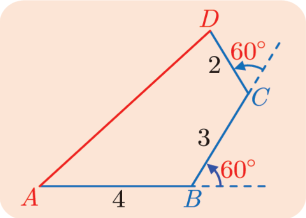
1. أثبت أنَّ $AC^2 - AB^2 = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC}$.
2. استنتج أنَّ $AC^2 - AB^2 = 2\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{BC}$.

19 ABC مثلّثٌ فيه $AB=5$ ، $AC=6$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=15$.

1. احسب قياساً للزاوية $\widehat{BAC}$.
2. احسب $(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})^2$ واستنتج BC .
3. a. أثبت أنه أيّاً كان الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ، كان $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}$
   b. استعمل هذه العلاقة لحساب كلٍّ من $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.
   c. أعطِ، باستعمال الآلة الحاسبة، قيمةً تقريبيّة لقياس كلٍّ من الزاويتين $\widehat{ABC}$ و $\widehat{ACB}$.
4. ليكن H المسقط القائم للنقطة A على المستقيم (BC) .
   a. أثبت أنَّ H هي نقطةٌ من القطعة المستقيمة $[BC]$.
   b. احسب كلّاً من AH و مساحة المثلّث ABC .

20 تأمّل الشكل المجاور واحسب المقدار AD بنشر

$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})^2$.

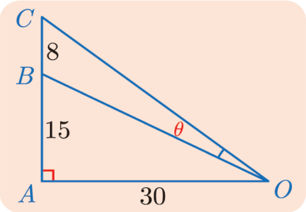


21 نتأمّل شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ، نظيميهما بالترتيب 2 و 3 ، ونفترض أنّ جداءهما السلّمي يساوي -4 .

1. a. احسب $(\vec{u}+\vec{v})^2$ واستنتج $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ ،
   b. احسب $\|2\vec{u}-\vec{v}\|$.
2. a. احسب بدلالة العدد x المقدار $(x\vec{u}-\vec{v})^2$.
   b. واستنتج قيم x التي تُحقّق $\|x\vec{u}-\vec{v}\|=\sqrt{6}$.

22 A و B و C ثلاث نقاط على استقامة واحدة، و B تقع بين A و C . أُخذت نقطةٌ O على المستقيم المرسوم من A عمودياً على المستقيم (AB) . أثبت أنَّ

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=OA^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$



تطبيق: في الحالة الموافقة للشكل المرسوم جانباً، احسب قياساً تقريبيّاً للزاوية θ .

23 نتأمّل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، النقطة $A(3,1)$ ، والنقطتين B و C اللتين تجعلان كلاً من المثلّثين BOA و COA متساوي الساقين وقائم الزاوية في O . نضع $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$.
أثبت أنَّ « إيجاد إحداثيّات B و C » يؤول إلى إيجاد الأشعّة $\vec{n}$ ذات النظيم $\sqrt{10}$ والعموديّة على $\vec{u}$. عيّن هذه الأشعّة $\vec{n}$ ، ثُمَّ استنتج إحداثيّات B و C .

24 نتأمّل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، النقطة $A(3,4)$. ونتأمّل على المستقيم المرسوم من A عمودياً على (OA)، النقطتين B و C المتناظرتين بالنسبة إلى A واللّتين تجعلان المثلّث BOC متساوي الأضلاع.

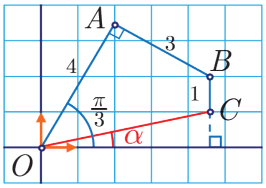
1. a. احسب OA وأثبت أنَّ $AB = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

b. استنتج أنَّ « إيجاد إحداثيّات B و C » يؤول إلى إيجاد الأشعّة $\vec{n}$ ذات النظيم $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ والعموديّة على $\overrightarrow{OA}$.

2. عيّن الأشعّة $\vec{n}$، ثُمّ استنتج إحداثيّات B و C .

25 نتأمّل في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، مستقيمين d و d' معادلتاهما على التوالي $y = \frac{3}{2}x + 3$ و $y = -2x + 10$. يقطعُ المستقيمُ d محورَ التراتيب في B، ويقطعُ المستقيمُ d' محورَ الفواصل في C، ويتقاطعُ d و d' في A . ارسمْ شكلاً. وأعطِ قياساً α للزاوية $\widehat{BAC}$.

26 في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، النقاط A و B و C متوضّعة وفق ما يبيّنه الشكل المجاور.



1. احسب إحداثيّات النقاط A و B و C .

2. استنتج قياساً تقريبيّاً للزاوية α .

27 ABC مثلثٌ قائم في A، H هي المسقط القائم للنقطة A على (BC) و I هي منتصف $[BC]$. J المسقط القائم للنقطة H على (AB)، و K المسقط القائم للنقطة H على (AC) .

1. أثبت أنَّ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JK} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{JK} = 2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{JK}$.

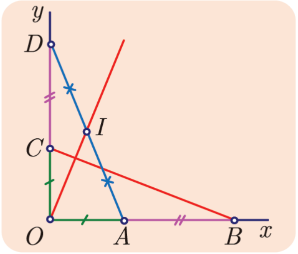
2. أثبت أنَّ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HA}$، وأنَّ $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}$.

3. استنتج ممّا سبق أنّ المستقيمين (AI) و (JK) متعامدان.

28 نتأمّل زاويةً قائمة $\widehat{xOy}$، وأربع نقاط A و B و C و D كما في الشكل. I هي منتصف القطعة $[AD]$. نريد إثبات أنَّ المستقيمين (BC) و (OI) متعامدان.

أولاً: حلٌّ تحليلي

نختار معلماً متجانساً $(O,\vec{i},\vec{j})$ يكون فيه $A(a,0)$ و $D(0,b)$ حيث $a > 0$ و $b > 0$.



1. ارسم شكلاً وضّعْ عليه هذا المعلم.

2. احسب بدلالة a و b إحداثيّات النقاط B و C و I .

3. استنتج أنَّ المستقيمين (OI) و (BC) متعامدان.

ثانياً: حلٌّ هندسي

1. تحقَّق من أنَّ $2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$، واستنتج أنَّ

$$2\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$$

2. أثبت إذنْ أنَّ المستقيمين (OI) و (BC) متعامدان.

29 a و b و c ثلاثةُ أعداد حقيقيّة ليست معدومة و $b \neq c$. في معلمٍ متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$، تعطى النقاط $A(0,a)$ و $B(b,0)$ و $C(c,0)$. نرمز إلى نقطة تلاقي ارتفاعات المثلّث ABC بالرمز H، وبالرمز d إلى المستقيم المرسوم من B عمودياً على (BC) وبالرمز d' إلى المستقيم المرسوم من C عمودياً على (BC). نمرِّرُ من O المستقيم العموديّ على (AB) فيلتقي d في النقطة P والمستقيم العموديّ على (AC) فيلتقي d' في Q.

1. أثبت أنَّ ترتيب H يساوي $-\dfrac{bc}{a}$. (**مساعدة :** $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$)
2. احسب تراتيب النقاط P و Q بدلالة a و b و c.
3. استنتج ممّا سبق أنَّ النقاط P و Q و H تقع على استقامة واحدة.

30 مستقيم أولر Euler في المثلث

أولاً: أسئلة تمهيدية. السؤالان الآتيان مستقلّان.

1. A و B و C ثلاثُ نقاطٍ ليست على استقامة واحدة. أثبت أنَّ الشعاع الوحيد $\vec{u}$ الذي يحقّق $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ و $\vec{u} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ هو الشعاع المعدوم.
2. OBC مثلّثٌ متساوي الساقين في O. أثبت أنَّ $(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

ثانياً. ABC مثلّثٌ ما، Γ هي الدائرة المارّة برؤوسه والتي مركزها O، H هي نقطة تلاقي ارتفاعاته، و G هي مركز ثقله.

1. باستعمال 2. في أولاً، والعلاقة $\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{HA}$ أثبت ما يلي :
   ① إنَّ $(\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.
   ② وبالمثل إنَّ $(\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
   ③ باستعمال 1. في أولاً، استنتج أنَّ $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
2. نأخذ في الحسبان أنَّ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
   ① أثبت أنَّ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$.
   ② استنتج ممّا سبق أنَّ O و H و G تقع على استقامة واحدة. («مستقيم أويلر» هو المستقيمُ المارُّ بهذه النقاط).

31 نتأمّل مستقيماً d و نقطةً خارجه O، ولتكن H المسقط القائم للنقطة O على d. نقرن، بكل نقطة متغيرة M من d، نقطةً M' تحقّقُ الشرطين: O و M و M' على استقامة واحدة و $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}=OH^2$.

1. a. تحقّقْ أنّ $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OH}=OH^2$.

b. استنتج أنّ M' هي المسقط القائم للنقطة H على (OM).

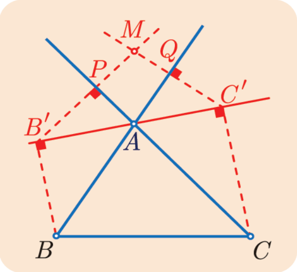
2. نهدف إلى إيجاد المحل الهندسي $\mathcal{L}$ للنقطة M' عندما ترسمُ M المستقيم d.

a. أثبت أنَّ M' تنتمي إلى دائرة $\mathcal{C}$ يُطلبُ تعرُّفُها. بذا نكون قد أثبتنا أنَّ $\mathcal{L}$ محتوى في $\mathcal{C}$.

b. بالعكس، تبقى الإجابةُ عن السؤال الآتي: أكلُّ نقطةٍ M' من $\mathcal{C}$ هي نقطةٌ من $\mathcal{L}$؟ خذْ نقطةً ما M' من $\mathcal{C}$ تختلف عن O، يقطعُ المستقيمُ (OM') المستقيمَ d في M. أثبت أنَّ $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}=OH^2$.

c. استنتج المحلّ الهندسي $\mathcal{L}$ للنقطة M' عندما ترسمُ M المستقيم d.

32 ABC مثلّثٌ ما، و Δ مستقيمٌ متحوّل يمرّ بالنقطة A، ومختلف عن كلٍّ من (AB) و (AC). B' و C' هما المسقطان القائمان للنقطتين B و C على Δ. النقطة P هي المسقط القائم للنقطة B' على (AC)، والنقطة Q هي المسقط القائم للنقطة C' على (AB).
أخيراً، يتقاطع المستقيمان $(B'P)$ و $(C'Q)$ في M.



1. ما العناصر الثابتة في الشكل؟ وما العناصر المتحولة؟

2. a. تحقّقْ أنَّ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'M}=0$، ثمَّ استعمل $\overrightarrow{C'M}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC'}$ لاستنتاج أنَّ: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{AC'}$.
أثبت بالمثل أنّ $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{AB'}$.

b. استنتج من الأسئلة السابقة أنَّ المستقيمين (AM) و (BC) متعامدان.

3. ما الخطّ الثابت الذي تتحوّل عليه M عندما يتحوّل Δ.

33 نتأمّل في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ النقاط $A(3,2)$ و $B(0,6)$ و $M(x,y)$.

1. احسب، بدلالة x و y، كلّاً من $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OM}$.

2. a. أثبت أنَّ Δ_1، مجموعة النقاط M التي تحقّق $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}=18$، هي مستقيمٌ يطلبُ رسمه.

b. أثبت أنَّ Δ_2، مجموعة النقاط M التي تحقّق $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OM}=18$، هي مستقيمٌ يطلبُ رسمه.

3. a. أثبت وجود نقطة وحيدة C تحقّق $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=18$ يطلب إيجاد إحداثيّاتها.

b. أثبت أنَّ المستقيمين (OC) و (AB) متعامدان.

34 نتأمّل في معلمٍ متجانسٍ $(O;\vec{i},\vec{j})$، النقاط $A(-3,1)$ و $B(1,5)$ و $M(x,y)$.

1. أثبت أنَّ $MA^2 - MB^2 = 8x + 8y - 16$.
2. ارسم مجموعةَ النقاط M التي تحقّقُ $MA^2 - MB^2 = -8$.

35 $ABCD$ مربّعٌ طولُ ضلعه يساوي 2 ومركزه O، و I منتصف $[AB]$.

1. أثبت أنَّ مجموعة النقاط M التي تحقّق $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 2$ هي المستقيم (OI).
2. a. أثبت أنَّ $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = IM^2 - 1$.

b. استنتج أنَّ مجموعة النقاط M التي تحقِّق $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 4$ هي الدائرة التي مركزها I وتمرُّ بالنقطة C.

36 $ABCD$ مربّعٌ طولُ ضلعه يساوي 2، و I منتصف $[AB]$.

1. a. أثبت أنّه أينما كانت النقطة M، كان:

$$MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$$

b. استنتج أنَّ مجموعة النقاط M التي تحقّق $MA^2 - MB^2 = 4$ هي مجموعة النقاط M التي تحقّق $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 2$.

2. أثبت أنَّ مجموعة النقاط M التي تحقِّق $MA^2 - MB^2 = 4$ هي المستقيم (BC).

37 $[AB]$ قطرٌ في دائرة $\mathcal{C}$ مركزها O. نقرن بكلِّ نقطة M مختلفة عن A من $\mathcal{C}$ النقطة M' من المستقيم (AM) التي تُحقّق $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM'} = AB^2$. ما المحلّ الهندسي $\mathcal{L}$ للنقطة M' عندما تتحوّل M على الدائرة $\mathcal{C}$ محذوفاً منها النقطة A.

38 نتأمّل مثلّثاً ABC ومستقيماً Δ. لتكن A' و B' و C'، بالترتيب، المساقط القائمة للنقاط A و B و C على Δ. النقطة O هي نقطة تقاطع المستقيم المارّ بالنقطة B' عمودياً على (AC) مع المستقيم المارّ بالنقطة C' عموديّاً على (AB). أثبت أنّ المستقيمين (OA') و (BC) متعامدان.

ليكن $\vec{u}$ شعاع واحدة يوجّه المستقيم Δ. عبّر عن الجداءَيْن السلّميين $\overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{AB}$ بدلالة $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

4

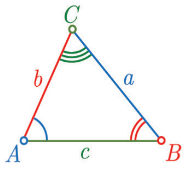
تطبيقاتُ الجداء السُلَّمي

1. العلاقات العدديّة في المثلّث
2. المستقيم والجداء السلّمي
3. الدائرة والجداء السلّمي
4. النسب المثلّثيّة، دساتير الجمع والمضاعفة

الطوسي

وُلِدَ ناصر الدين الطوسي (1201-1274) في خراسان وكان فيلسوفاً وفلكيّاً ورياضياتيّاً غزير الإنتاج، وله ما يزيد عن مئة وخمسين كتاباً تضمّ بينها النسخ النهائيّة لتراجم أعمال إقليدس وأرخميدس وبطليموس.

أهم ما كتب الطوسي في الهندسة كتاب **الشكل الرباعي** وهو كتاب مؤلّف من خمسة أجزاء يعالج المثلّثات الكرويّة معالجة موسعة، وقد وضع فيه الطوسي أُسس علم المثلَّثات وتعامل معه لأوّل مرّة بصفته علماً قائماً بذاته مستقلّاً عن علم الفلك.



نجد في هذا الكتاب ما يُعرف في يومنا هذا باسم قانون الجيب *The sine law* الذي ينص على أنّ نسبة طول أي ضلع في مثلّث إلى جيب الزاوية التي تقابل هذا الضلع مقدار ثابت:

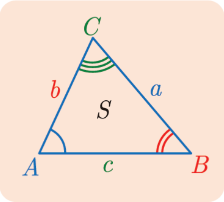
$$\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}$$

سنستكشف في هذا البحث علم المثلّثات باستعمال أدوات حديثة مثل الأشعّة والجداء السلّمي، وهي أدوات لم تكن موجودة في عهد ناصر الدين الطوسي.

4

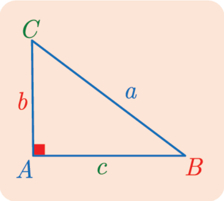
تطبيقات الجداء السلّمي

انطلاقة نشطة



في حالة مثلّث ABC، جرت العادة أن نرمز $BC = a$ و $CA = b$ و $AB = c$، كما نرمز بالرمز S إلى مساحة سطح المثلّث. ونكتب $\widehat{A} = \widehat{BAC}$ و $\widehat{B} = \widehat{CBA}$ و $\widehat{C} = \widehat{ACB}$.

رأينا في حالة مثلّث ABC، قائم في A، الخواصّ الآتية:



- ترتبط أضلاع المثلّث القائم بعلاقة فيثاغورث $a^2 = b^2 + c^2$.
- طول المتوسّط المتعلّق بالوتر في المثلّث القائم يساوي نصف طول الوتر.
- تحسب مساحة المثلّث القائم بالعلاقة $S = \frac{1}{2}bc$.
- ترتبط أطوال أضلاع المثلّث وزواياه بعلاقات مثل $b = a\sin\hat{B}$.

كيف تصبح هذه العلاقات في المثلّث غير القائم؟

1 العلاقات العدديّة في المثلّث

1.1. علاقة الكاشي

مُبرهَنة 1

باستعمال الرّموز السابقة لدينا

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$

الإثبات

لمّا كان $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$، استنتجنا أنّ

$$BC^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$$

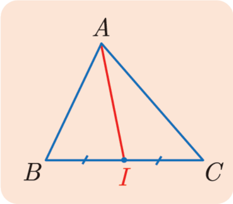
ولكن $AC^2 = b^2$ و $AB^2 = c^2$ و $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = AC \times AB \times \cos\widehat{A}$، إذن

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$

نجد بالمثل $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$ و $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$.

2.1. مبرهنة المتوسّط

مُبرهَنة 2



ABC مثلّث، والنقطة I منتصف $[BC]$. إذن

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

الإثبات

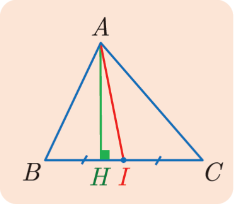
لمّا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}$ و $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB}$ استنتجنا أنّ

$$AB^2 = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 = AI^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IB} \qquad ①$$

$$AC^2 = (\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB})^2 = AI^2 + IB^2 - 2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IB} \qquad ②$$

ينتج بالجمع أنَّ $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + 2IB^2$ ، ولكن $IB = \frac{1}{2}BC$ ، نستنتج إذن، بالتعويض في العلاقة الأخيرة، ما يأتي:

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$



بطرح العلاقة ② من ① نجد

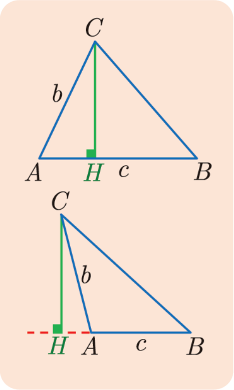
$AB^2 - AC^2 = 4\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{HI}\cdot\overrightarrow{CB}$.

3.1. علاقات أخرى في المثلّث

مُبرهَنة 3

باستعمال الرموز المتعارفة لدينا $S = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$.

الإثبات



نعلم أنَّ $S = \frac{1}{2}AB \times CH$. عندما تكون $\widehat{A}$ حادّة، يكون

$$CH = CA \times \sin\widehat{A}$$

وعندما تكون $\widehat{A}$ منفرجة، يكون

$$CH = CA \times \sin(\pi - \widehat{A}) = CA \times \sin\widehat{A}$$

وبذلك يكون في كلتا الحالتين:

$$S = \frac{1}{2}AB \times AC\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}bc\ \sin\widehat{A}$$

نتيجة

استناداً إلى المبرهنة 3، نجدُ أنَّ $2S = bc\sin\widehat{A} = ac\sin\widehat{B} = ba\sin\widehat{C}$، إذن بتقسيم $2S$ على abc، نحصل على $\frac{2S}{abc} = \frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c}$

ولمّا كانت جيوب زوايا المثلّث مختلفة عن الصفر، استنتجنا أنّ $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}$.

تكريساً للفهم

بماذا تفيد هذه العلاقات المثلثية ؟

- في حساب قياسات زوايا مثلّث $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ عند معرفة أطوال أضلاعه a, b, c.
- في حساب أطوال جميع أضلاعه وقياسات جميع زواياه انطلاقاً من معرفة بعضها.
- في حساب أطوال ارتفاعاته ومتوسّطاته.

مثال الحساب في المثلّث.

ABC مثلّث، فيه $a = 32,\ b = 28,\ c = 20$، وفق الترميز المألوف. أوجد قياسات تقريبيّة للزوايا $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ واحسب طول كلٍّ من المتوسّط والارتفاع المرسومين من A.

الحل

❶ حساب الزوايا. لمّا كان $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$، إذن استنتجنا أنّ

$$32^2 = 28^2 + 20^2 - 2 \times 28 \times 20 \times \cos\widehat{A}$$

إذن $\cos\widehat{A} = \frac{1}{7}$. ولأنّ $0 < \widehat{A} < \pi$ استنتجنا باستعمال الآلة الحاسبة أنّ $82°$ قيمةٌ تقريبيّة لقياس $\widehat{A}$ مقرّباً إلى أقرب درجة.

وبأسلوب مماثل، انطلاقاً من علاقة الكاشي $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$، نجد $\cos\widehat{B} = \frac{1}{2}$، إذن $\widehat{B} = 60°$. وأخيراً نحسبُ $\widehat{C}$ بسهولة من $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$.

❷ حساب الارتفاع. لنضع $AH = h$. نستخلصُ من العلاقات

$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B}$$

أنّ

$$h = c\sin\widehat{B} = 20\sin 60° = 10\sqrt{3}$$

❸ حساب المتوسّط. ليكن I منتصف $[BC]$، ولنضع $AI = m$. لدينا، استناداً إلى مبرهنة المتوسّط، ما يأتي $c^2 + b^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2}$، إذن

$$m^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{28^2 + 20^2}{2} - \frac{32^2}{4} = 16 \times 21$$

ومن ثَمَّ $m = 4\sqrt{21}$.

مثال الحساب في المثلّث.

ABC مثلّثٌ، عُلِم فيه $a = 4$ و $\widehat{B} = 75°$ و $\widehat{C} = 45°$. احسب b و c.

الحل

نعلم من عناصر المثلّث ضلعاً a وزاويتين $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$. ونريد حساب بقيّة العناصر وهي $\widehat{A}$ و b و c. تفيدنا معرفةُ $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ في كتابة $\widehat{A} = 180° - (75° + 45°) = 60°$. ثُمّ نستفيد من علاقة الجيب $\dfrac{a}{\sin \widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin \widehat{C}}$ فنجد

$$\frac{4}{\sin 60°} = \frac{b}{\sin 75°} = \frac{c}{\sin 45°}$$

ولمّا كان

$$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{و} \quad \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

استنتجنا

$$a = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{3} \approx 3.27$$

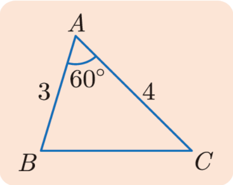
$$b = \frac{8\sqrt{3}}{3} \sin 75° \approx 4.46$$

تَدرَّبْ

① ABC مثلّثٌ. احسب، في كلٍّ من الحالات الآتية، أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا الباقية.

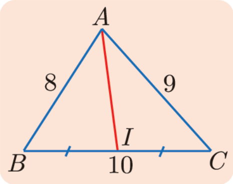
1. $AB = 2 + \sqrt{3}$ و $AC = 1$ و $\widehat{BAC} = 60°$.
2. $\widehat{ABC} = 120°$ و $\widehat{ACB} = 15°$ و $BC = 2$.
3. $AB = 2\sqrt{3}$ و $BC = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ و $CA = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

② في حالة الشكل المرسوم جانباً، احسب:



1. مساحة المثلّث ABC.
2. محيط المثلّث ABC.

③ في حالة الشكل المرسوم جانباً، احسب:



1. احسب طول المتوسّط AI.
2. احسب طولي المتوسّطين الآخرين.

④ نتأمّل مثلّثاً ABC مساحته $5\sqrt{3}$، وفيه $AB = 4$ و $\widehat{BAC} = 60°$. احسب AC، واستنتج أنَّ $BC = \sqrt{21}$.

② المستقيم والجداء السلّمي

1.2. معادلة مستقيم في مَعْلَم ما

مُبرهَنة 4

في مَعْلَمٍ ما:

- لكل مستقيم معادلة بالصيغة $ax+by+c=0$، ويكون الشعاع $\vec{u}(-b,a)$ شعاعاً موجِّهاً له.
- وبالعكس، مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقّق إحداثيّاتها $ax+by+c=0$ حيث (a,b) لا يساوي $(0,0)$، هي مستقيمٌ موجَّهٌ بالشعاع $\vec{u}(-b,a)$.

الإثبات

❶ لإثبات الجزء الأوّل نناقش حالتين:

- إذا لم يكن المستقيم موازياً محور التراتيب، كانت $y=mx+p$ معادلةً له، وكان الشعاع $\vec{u}(1,m)$ شُعاعاً موجّهاً له. يكفي إذن أن نختار $a=m$ و $b=-1$ وأخيراً $c=p$.
- أمّا إذا كان المستقيم موازياً محور التراتيب، كانت له معادلة من الشكل $x=k$، وكان الشعاع $\vec{u}(0,1)$ شُعاعاً موجّهاً له. يكفي إذن أن نختار $a=1$ و $b=0$ وأخيراً $c=-k$.

❷ لإثبات الجزء الثاني نناقش أيضاً حالتين:

- إذا كان $b\neq 0$. أمكن كتابة المعادلة $ax+by+c=0$ بالشكل

$$y=\underbrace{-\frac{a}{b}}_{m}x\underbrace{-\frac{c}{b}}_{p}$$

فهي إذن معادلة مستقيم يقبل الشعاع $(1,-\frac{a}{b})$ شعاعاً موجّهاً، ولأنّ هذا الشعاع مرتبط خطيّاً بالشعاع $\vec{u}(-b,a)$ استنتجنا أنّ المعادلة $ax+by+c=0$ تمثّل مستقيماً يقبل $\vec{u}(-b,a)$ شعاعاً موجّهاً.

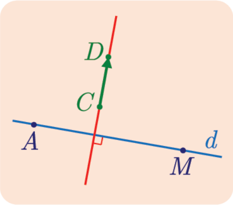
- إذا كان $b=0$ وجب أن يكون $a\neq 0$. وأمكن كتابة المعادلة $ax+by+c=0$ بالشكل $x=-c/a$ وهي معادلة مستقيم موجّه بالشعاع $\vec{u}(0,1)$.

2.2. الشعاع الناظم ومعادلة مستقيم

تعريف 1

إذا كان شّعاعٌ غير معدومٍ $\vec{n}$ عمودياً على شّعاع موجّه لمستقيم d، قلنا إنَّ $\vec{n}$ ناظمٌ على المستقيم d.

فإذا كانت A نقطة من مستقيم d يقبل شعاعاً ناظماً $\vec{n} = \overrightarrow{CD}$، عندئذ تنتمي النقطة M إلى المستقيم d إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ أو $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.



مُبرهَنة 5

في مَعْلَمٍ **متجانس**. إذا كانت $ax + by + c = 0$، حيث $(a,b) \neq (0,0)$، معادلة مستقيم d، كان الشعاع $\vec{n}(a,b)$ شّعاعاً ناظماً على d.

الإثبات

عملاً بالمبرهنة 4 يكون الشّعاع $\vec{u}(-b,a)$ شّعاعَ توجيهٍ للمستقيم d. ولمّا كان

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = a \times (-b) + ba = 0$$

استنتجنا أنّ $\vec{n}$ و $\vec{u}$ متعامدان، فيكون $\vec{n}$ شّعاعاً ناظماً على المستقيم d.

مُبرهَنة 6

في مَعْلَمٍ **متجانس**. إذا كان الشّعاع غير المعدوم $\vec{n}(a,b)$ شّعاعاً ناظماً على مستقيم d، كان للمستقيم d معادلة من الشكل $ax + by + c = 0$.

الإثبات

استناداً إلى التعريف 1، d هو مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقّق $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ و $A(x_0, y_0)$ نقطةٌ من d. وتترجم المساواة $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ بالشكل

$$(x - x_0)a + (y - y_0)b = 0$$

أو بالصيغة المكافئة

$$ax + by + c = 0$$

إذْ $c = -ax_0 - by_0$. وعليه فإنّ $ax + by + c = 0$ هي معادلة للمستقيم d.

3.2. المستقيمات المتعامدة

مُبرهَنة 7

في مَعْلَمٍ متجانس. نتأمّل مستقيمين d و d' معادلتاهما

$ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$

بالترتيب. يكون المستقيمان d و d' متعامدين إذا وفقط إذا كان $aa' + bb' = 0$.

الإثبات

الشعاع $\vec{n}(a,b)$ شعاعٌ ناظمٌ على المستقيم d و الشعاع $\vec{n}'(a',b')$ شعاعٌ ناظمٌ على المستقيم d'. فالقولُ إنّ المستقيمين d و d' متعامدان، يكافئُ القولَ إنّ الشعاعين $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ متعامدان، أي $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$، أو $aa' + bb' = 0$.

إذا كان d و d' مستقيمين مائلين، معادلتاهما $y = mx + p$ و $y = m'x + p'$ بالترتيب، كان شرط تعامدهما $mm' = -1$.

تكريساً للفهم

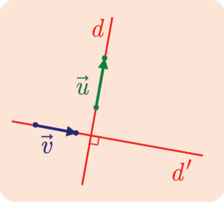
كيف نستخدم المبرهنات 4 و 5 و 6 ؟

- المبرهنة 6. إنّ معرفة شعاع ناظم على مستقيم، يعني معرفة جزء من معادلته.

مثال

إذا كان $\vec{n}(2,3)$ ناظماً على المستقيم d، كانت $2x + 3y + c = 0$ معادلةً له. من ثمّ نجد c انطلاقاً من إحداثيّتي نقطةٍ معلومة من d.

- المبرهنتان 4 و 5. بدايةً، علينا معرفة أنّه إذا تعامد مستقيمان d و d'، كان كلُّ شعاع موجِّهٍ لأحدهما، شعاعاً ناظماً على الآخر.

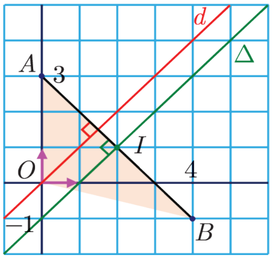


في الشكل المجاور، إذا كان $\vec{u}$ موجّهاً للمستقيم d، كان $\vec{u}$ ناظماً على المستقيم d'، وإذا كان $\vec{v}$ موجّهاً للمستقيم d'، كان $\vec{v}$ ناظماً على المستقيم d.

مثال

للمستقيم d المعادلة $3x - 4y - 5 = 0$، إذن الشعاع $\vec{u}(4,3)$ شعاعٌ موجِّهٌ للمستقيم d استناداً إلى المبرهنة 4. فهو إذن شعاعٌ ناظمٌ على كلّ مستقيمٍ d' يعامد d. ولهذا يقبل d' معادلةً من الصيغة $4x + 3y + c = 0$.

مثال إيجاد معادلات المستقيمات.



نتأمّل النقطتين $A(0,3)$ و $B(4,-1)$ في معلمٍ متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. اكتب معادلةً للمستقيم Δ محور القطعة $[AB]$، ومعادلةً للمستقيم d ارتفاع المثلّث OAB المرسوم من الرأس O.

الحل

كلٌّ من Δ و d عموديٌّ على $[AB]$، فهما متوازيان. ينتجُ أنَّ $\overrightarrow{AB}(4,-4)$ شعاعٌ ناظمٌ على كلٍّ من Δ و d، فالشعاع $\vec{n}(1,-1)$ هو أيضاً شعاع ناظم عليهما. لهذين المستقيمين إذن معادلةٌ من الصيغة : $x-y+c=0$.

- يمرُّ المستقيم d بالنقطة O، إذن $c=0$، و $x-y=0$ معادلةٌ للمستقيم d.
- يمرُّ المستقيم Δ بالنقطة I، منتصف $[AB]$، فإحداثيّتاها $(2,1)$ تحقّقان معادلة Δ أي $2-1+c=0$، أو $c=-1$. وعليه تكون $x-y-1=0$ معادلةٌ للمستقيم Δ.

تَدرَّبْ

① في كلِّ حالةٍ ممّا يأتي، ارسم المستقيم d إذا علمتَ أنّه يمرّ بالنقطة A وأنّ $\vec{n}$ شعاعٌ ناظمٌ عليه، ثمَّ أعطِ معادلةً له.

❶ $A(1,-1)$ و $\vec{n}(2,-3)$.

❷ $A(-1,-2)$ و $\vec{n}(0,2)$.

❸ $A(-3,2)$ و $\vec{n}(3,0)$.

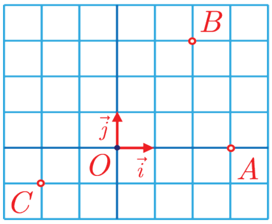
② عيّن شعاعاً ناظماً على المستقيمٌ d الذي معادلته $3x-y+5=0$. ثُمَّ اكتب معادلةً للمستقيم Δ المارّ بالنقطة $A(1,2)$ والعموديّ على d.

③ في كلٍّ من الحالات الآتية، بيِّن إذا كان المستقيمان d و d' متعامدين أو غير متعامدين.

❶ $d : x-2y+4=0$ و $d' : 6x+3y-7=0$.

❷ $d : y=-2x+5$ و $d' : x-2y+1=0$.

❸ $d : (1+\sqrt{2})x-y+3=0$ و $d' : (\sqrt{2}-1)x+y=0$.



④ في حالة الشكل المرسوم جانباً:

❶ اكتب معادلةً للمستقيم Δ المارّ بالنقطة A موازياً المستقيم (BC).

❷ اكتب معادلةً للمستقيم Δ' المارّ بالنقطة A عموديّاً على المستقيم (BC).

③ الدائرة والجداء السلّمي

1.3. الدائرة التي قطرها قطعة مستقيمة معطاة

مُبرهَنة 8

الدائرة التي قطرها القطعة المستقيمة $[AB]$ هي مجموعة النقاط M التي تُحقّق

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$$

الإثبات

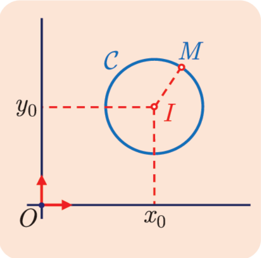
في الحقيقة، لتكن I منتصف $[AB]$، ولنعرّف $AB=2R$. عندئذ أيّاً كانت النقطة M في المستوي كان

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})$$
$$=MI^2-IA^2=MI^2-R^2$$

إذن $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ إذا وفقط إذا كان $MI=R$.

2.3. معادلة الدائرة في مَعْلَم متجانس.

① الدائرة $\mathcal{C}$ التي مركزها $I(x_0,y_0)$ ونصف قطرها R.



الدائرة $\mathcal{C}$ هي مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقّق $IM=R$ أو $IM^2=R^2$ لأنّ المقدارين R و IM موجبان. ولمّا كانت مركّبتا الشعاع $\overrightarrow{IM}$ هما $(x-x_0,y-y_0)$ استنتجنا أنّ المساواة $IM^2=R^2$ تُكافئ:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

فالدائرة $\mathcal{C}$ هي مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقّق

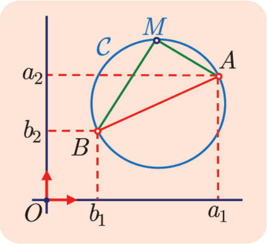
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

نقول إنّ $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ هي معادلة الدائرة $\mathcal{C}$ التي مركزها (x_0,y_0) ونصف قطرها R.

مثال

$(x+2)^2+(y-3)^2=6$ هي معادلة الدائرة التي مركزها $(-2,3)$ ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

② الدائرة $\mathcal{C}$ التي قطرها $[AB]$.



لتكن $A(a_1,a_2)$ و $B(b_1,b_2)$، ولتكن $\mathcal{C}$ الدائرة التي قطرها $[AB]$.
لمّا كانت $\mathcal{C}$ هي مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقّق

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$$

ولأنّ مركّبات الشعاعين $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{MB}$ هي $(x-a_1,y-a_2)$ و $(x-b_1,y-b_2)$ بالترتيب، أخذت معادلة $\mathcal{C}$ الصيغة الآتية :

$$(x-a_1)(x-b_1)+(y-a_2)(y-b_2)=0$$

وهي تُكافئ $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$ إذ

$$a'=-a_1-b_1 \quad \text{و} \quad b'=-a_2-b_2 \quad \text{و} \quad c'=a_1b_1+a_2b_2$$

لكل دائرة معادلة من الصيغة $x^2+y^2+ax+by+c=0$، ولكن ليست كلُّ معادلة من هذه الصيغة، بالضرورة، معادلةً لدائرة، كما سنرى لاحقاً.

مثال كيف نكتب معادلة دائرة ؟

في معلمٍ متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

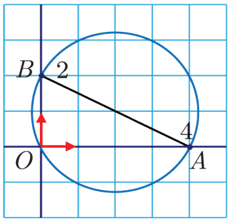
1. اكتب معادلةً للدائرة $\mathcal{C}$ التي مركزها $I(1,2)$ والمارَّة بالنقطة $J(3,-2)$.
2. اكتب معادلةً للدائرة $\mathcal{C}'$ المارَّة بالنقاط O و $A(4,0)$ و $B(0,2)$.

الحل

1. نعرفُ مركز $\mathcal{C}$. علينا إذن حساب نصف القطر. لمّا كانت $\mathcal{C}$ تمرُّ بالنقطة J، كان نصف قطرها R مساوياً IJ. ولأنّ مركّبات $\overrightarrow{IJ}$ هي $(2,-4)$، استنتجنا أنّ

$$R^2=IJ^2=4+16=20$$

وبذا تكون $(x-1)^2+(y-2)^2=20$ معادلةً للدائرة $\mathcal{C}$.



2. المثلّث BOA قائمٌ في O. $\mathcal{C}'$ هي الدائرة التي قطرها $[AB]$، فهي إذن مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقّق $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$. مركّبات $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{MB}$ هي $(4-x,-y)$ و $(-x,2-y)$ بالترتيب، إذن:

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-x(4-x)-y(2-y)=x^2+y^2-4x-2y$$

نستنتج إذن أنّ

$$x^2+y^2-4x-2y=0$$

هي معادلةٌ للدائرة $\mathcal{C}'$.

مثال كيف نقرّر إذا كانت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادلة دائرة ؟

في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، $\mathcal{C}_1$ هي مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقّق إحداثيّاتها العلاقة:

$$x^2+y^2-2x+y+1=0$$

1. هل المجموعة $\mathcal{C}_1$ هي دائرة ؟ عيّن إحداثيّات مركزها ونصف قطرها عند الإيجاب.
2. أعدْ السّؤال السّابق في كلٍّ من الحالتين الآتيتين:
   a. المجموعة $\mathcal{C}_2$، التي معادلتها $x^2+y^2-2x+4y+5=0$.
   b. المجموعة $\mathcal{C}_3$، التي معادلتها $x^2+y^2-2x+y+2=0$.

لتعيين $\mathcal{C}$، مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقّق $x^2+y^2+ax+by+c=0$، نكتب هذه المعادلة بالصيغة $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=k$.

① إذا كان $k>0$، كانت $\mathcal{C}$ دائرة. إحداثيّات مركزها (x_0,y_0) ونصف قطرها $\sqrt{k}$.

② إذا كان $k=0$، كانت $\mathcal{C}$ نقطة واحدة (x_0,y_0).

③ إذا كان $k<0$، كانت $\mathcal{C}$ خالية.

الحل

1. إنّ x^2-2x هو مجموع الحدين الأول والثاني من منشور $(x-1)^2$. إذن

$$x^2-2x=(x-1)^2-1$$

وبالمثل

$$y^2+y=\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

فمعادلة $\mathcal{C}_1$ هي $(x-1)^2-1+(y+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+1=0$، أو

$$(x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

فالمجموعة $\mathcal{C}_1$ هي دائرة، مركزها $(1,-\frac{1}{2})$ ونصف قطرها يساوي $\frac{1}{2}$.

2.a. هنا لدينا $x^2-2x=(x-1)^2-1$ و $y^2+4y=(y+2)^2-4$، إذن تُكتب معادلةُ $\mathcal{C}_2$ بالصيغة : $(x-1)^2-1+(y+2)^2-4+5=0$ أو

$$(x-1)^2+(y+2)^2=0$$

فالمجموعة $\mathcal{C}_2$ هي نقطةٌ إحداثيّتاها $(1,-2)$.

2.b. بالمثل، تُكتب معادلةُ $\mathcal{C}_3$ بالصيغة

$$(x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{3}{4}$$

فالمجموعة $\mathcal{C}_3$ مجموعة خالية.

تَدرَّبْ

① اكتب، في كلٍّ من الحالات الآتية، معادلةً للدائرة $\mathcal{C}$.

❶ مركزها O ونصف قطرها $\sqrt{2}$.

❷ مركزها $I(-1,1)$ وتمرّ بالنقطة $A(3,-2)$.

❸ مركزها $I(2,3)$ وتمسُّ محور التراتيب.

❹ مركزها $I(-3,2)$ وتمسُّ محور الفواصل.

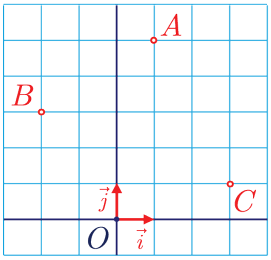
❺ قطرها $[AB]$ مع $A(2,-1)$ و $B(4,9)$.

❻ تمس Ox و Oy ويقع مركزها في الربع الأول.

② أثبت، في كلِّ حالةٍ، أنَّ مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقّق المعادلة المذكورة هي دائرة، يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

❶ $x^2+y^2-3x+4y+4=0$.

❷ $(x-1)(x-3)+(y-1)(y+2)=0$.



③ تأمّل الشكل المرسوم جانباً.

❶ اكتب معادلةً لمحور القطعة $[AB]$ وأخرى لمحور القطعة $[BC]$.

❷ استنتج إحداثيّتي مركز الدائرة المارّة برؤوس المثلّث ABC.

④ نتأمّل في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ المستقيم d ذا المعادلة $x+y-8=0$، والنقطة $A(3,0)$.

❶ وضِّع النقطة A وارسم المستقيم d في شكلٍ واحد.

❷ لتكن H المسقط القائم للنقطة A على d و K نقطة تقاطع d ومحور الفواصل.

a. أثبت أنَّ المثلث AHK قائمٌ ومتساوي الساقين واحسب AH.

b. استنتج معادلةً للدائرة $\mathcal{C}$ التي مركزها A وتمسُّ المستقيمَ d.

⑤ لتكن $\mathcal{C}$ دائرةً معادلتها $x^2+y^2-2x-2y-8=0$. ولتكن A و B نقطتي تقاطعها مع محور الفواصل، و C و D نقطتي تقاطعها مع محور التراتيب. احسب إحداثيّات هذه النقاط الأربع.

⑥ المعادلة $x^2+y^2-6x-2y=0$ معادلةٌ للدائرة $\mathcal{C}$.

❶ أثبت أنَّ $A(2,4)$ نقطةٌ من $\mathcal{C}$.

❷ ارسم $\mathcal{C}$ ووضِّع عليها A، ثمَّ أنشئ من A المماس d للدائرة $\mathcal{C}$.

❸ اكتب معادلةً للمماس d.

⑦ تأمّل النقطتين $A(2,3)$ و $B(-1,1)$، والمستقيم d ذا المعادلة $y=1$.

❶ وضِّعْ على شكلٍ النقطتين A و B وارسم عليه المستقيم d.

❷ أنشئ الدائرة $\mathcal{C}$ المارّة بالنقطتين A و B، ومركزها I نقطةٌ من المستقيم d.

❸ اكتب معادلةً لمحور القطعة $[AB]$. واستنتج إحداثيّتي النقطة I، ثمَّ معادلةً للدائرة $\mathcal{C}$.

4 النسب المثلّثيّة، دساتير الجمع والمضاعفة

1.4. دساتير الجمع

مُبرهَنة 9

أيّاً كانت الأعداد الحقيقيّة a و b كان

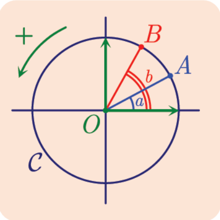
① $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$

② $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

③ $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$

④ $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$

الإثبات



① نرسمُ دائرةً مثلّثيّة $\mathcal{C}$ في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. ولتكن A و B النقطتين من الدائرة $\mathcal{C}$ اللتين تحقّقان بالراديان $(\vec{i},\overrightarrow{OA})=a$ و $(\vec{i},\overrightarrow{OB})=b$ عندئذ

$$\overrightarrow{OA}=\cos a\,\vec{i}+\sin a\,\vec{j} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{OB}=\cos b\,\vec{i}+\sin b\,\vec{j}$$

من ناحية أخرى، استناداً إلى علاقة شال في الزوايا الموجّهة، لدينا

$$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\left(\vec{i},\overrightarrow{OB}\right)-\left(\vec{i},\overrightarrow{OA}\right)=b-a$$

لنحسب إذن الجداء السلّمي $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ بطريقتين متذكرين أنّ $OA=OB=1$:

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\cos a\cos b+\sin a\,\sin b$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=OA\times OB\times\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\cos(b-a)=\cos(a-b)$$

ومنه نستنتج أنّ $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$.

② باستعمال $\cos(-x)=\cos x$ و $\sin(-x)=-\sin x$ وبكتابة $a+b$ بالصيغة $a-(-b)$ نجد:

$$\cos(a+b)=\cos(a-(-b))=\cos a\cos(-b)+\sin a\sin(-b)$$
$$=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$

③ لدينا $\sin(a-b)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(a-b)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+b\right)$ إذن

$$\sin(a-b)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos b-\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin b$$
$$=\sin a\cos b-\cos a.\sin b$$

④ بكتابة المجموع $a+b$ بالصيغة $a-(-b)$ نجد

$$\sin(a+b)=\sin(a-(-b))=\sin a\cos(-b)-\cos a\sin(-b)$$
$$=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$

وهو المطلوب إثباته.

تذكّر أنّ $\sin x=\cos(\frac{\pi}{2}-x)$ و $\cos x=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$.

2.4. دساتير المضاعفة

إذا استبدلنا بالعدد b العدد a في علاقتي $\cos(a+b)$ و $\sin(a+b)$ السابقتين، وجدنا:

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a \qquad \text{و} \qquad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

وباستعمال المساواة $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$، نحصل على العلاقتين الآتيتين:

$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a \qquad \text{و} \qquad \cos 2a = 2\cos^2 a - 1$$

وتكتبُ العلاقتان الأخيرتان بالصيغتين المُكافئتين الآتيتين:

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2} \qquad \text{و} \qquad \cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$$

مثال اختزال صيغة وإثبات مساواة.

1. بسِّط كتابة $F(x) = \cos(5x)\cos(3x) + \sin(5x)\sin(3x)$.
2. أثبت أنّه، أيّاً كان العدد الحقيقي x، كان $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$.
3. أثبت أنّه، أيّاً كان العدد الحقيقي a، كان

$1 + \cos a + \sin a = 2(\cos\frac{a}{2})(\cos\frac{a}{2} + \sin\frac{a}{2})$.

لإثبات مساواة، يكفي إجراء تحويلات على أحد طرفيها للوصول إلى الطرف الآخر.

الحل

1. هنا نتعرّف الصيغة $\cos a\cos b + \sin a\sin b$ حيث $a = 5x$ و $b = 3x$. وعليه يكون:

$F(x) = \cos(a-b) = \cos(5x-3x) = \cos 2x$.

2. ننطلق من حساب $\cos(x-\frac{\pi}{4})$، لأنّنا نتعرّف $\cos(a-b)$ حيث $a = x$ و $b = \frac{\pi}{4}$ فنجد:

$$\sqrt{2}\cos(x-\tfrac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(\cos x\cos\tfrac{\pi}{4} + \sin x\sin\tfrac{\pi}{4})$$
$$= \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x) = \cos x + \sin x$$

3. تفيد دساتير المضاعفة بحساب النسب المثلّثيّة للمقدار $2x$ عند معرفة تلك الموافقة للمقدار x. إذن، بجعل a تؤدّي دور $2x$، يمكننا التعبير عن $\sin a$ و $\cos a$ بدلالة $\sin\frac{a}{2}$ و $\cos\frac{a}{2}$. وعليه نجد

$$\sin a = 2\sin\tfrac{a}{2}\cos\tfrac{a}{2} \qquad \text{و} \qquad \cos a = 2\cos^2\tfrac{a}{2} - 1$$

إذن

$$1 + \cos a + \sin a = 2\cos^2\tfrac{a}{2} + 2\sin\tfrac{a}{2}\cos\tfrac{a}{2}$$
$$= 2\cos\tfrac{a}{2}(\cos\tfrac{a}{2} + \sin\tfrac{a}{2})$$

وبذا يتمّ المطلوب.

مثال النسب المثلّثيّة للزوايا $\frac{7\pi}{12}$ و $\frac{\pi}{8}$.

1. بملاحظة أنَّ $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$، احسب $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$.
2. بملاحظة أنَّ $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$، احسب $\cos\frac{\pi}{8}$ و $\sin\frac{\pi}{8}$.

الحل

1. انطلاقاً من المساواة $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ نجد

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$$

ونجدُ بطريقة مماثلة أنّ $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$.

2. باستعمال صيغ نسب ضعفي زاوية في حالة $a = \frac{\pi}{8}$ أي $2a = \frac{\pi}{4}$ نجد:

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}, \quad \sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

ولكن العدد $\frac{\pi}{8}$ ينتمي إلى المجال $]0,\frac{\pi}{2}[$ إذن $\cos\frac{\pi}{8} > 0$ و $\sin\frac{\pi}{8} > 0$. وعليه

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad \text{و} \quad \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

تَدرَّبْ

① أجب عن الأسئلة الآتية:

❶ تحقّق أنَّ $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$، ثمَّ احسب $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$.

❷ تحقّق أنَّ $\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{12}$، ثمَّ احسب $\cos\frac{11\pi}{12}$ و $\sin\frac{11\pi}{12}$.

❸ باستعمال $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$، احسب $\cos^2\frac{\pi}{12}$ واستنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

② احسب $\sin 2x$، في كلٍّ من الحالات الآتية:

❶ $\sin x = \frac{1}{3}$ و $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ ❷ $\sin x = -\frac{3}{5}$ و $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

❸ $\cos x = \frac{4}{5}$ و $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ ❹ $\cos x = -\frac{5}{12}$ و $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

③ اختزل كلّاً من العبارات الآتية:

❶ $A(x) = \cos(7x)\sin(6x) - \sin(7x)\cos(6x)$.

❷ $B(x) = \cos x\cos(2x) - \sin x\sin(2x)$.

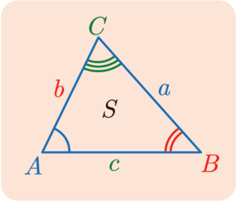
❸ $C(x) = \cos(3x)\sin(2x) + \cos(2x)\sin(3x)$.

④ عبِّر عن كلٍّ من العبارات الآتية بدلالة $\sin x$ أو $\cos x$.

❶ $2\cos(x - \frac{\pi}{3})$ ❷ $\sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4})$ ❸ $\sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})$

أفكار يجب تَمثُّلُها

العلاقات في المثلّث



- يمكن تعيين أضلاع وزوايا مثلّث، إذا عرفنا:
  - الأضلاع الثلاثة a و b و c.
  - أو ضلعين والزاوية المحددة بهما.
  - أو زاويتين وواحد من أضلاعه.

  وذلك بالاستفادة من مبرهنة الكاشي أو علاقة التجيب

  $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}.$$

  وعلاقة الجيب

  $$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}.$$

- تفيد مبرهنة المتوسّط، ومختلف علاقات المساحة، في حساب المتوسّطات والارتفاعات.

معادلة المستقيم

في معلمٍ ما

- معادلات المستقيمات هي من الصيغة $ax + by + c = 0$، مع $(a,b) \neq (0,0)$.
- الشعاع $\vec{u}(-b,a)$ هو شعاعٌ موجِّهٌ للمستقيم الذي معادلته $ax + by + c = 0$.
- إذا كانت $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ معادلتي المستقيمين d و d' بالترتيب، عندئذ يكون المستقيمان d و d' متوازيين إذا وفقط إذا $ab' - a'b = 0$.

في معلمٍ متجانس

- الشعاع $\vec{n}(a,b)$ هو شعاع ناظم على المستقيم الذي معادلته $ax + by + c = 0$.
- إذا كان الشعاع غير المعدوم $\vec{n}(a,b)$ ناظماً على مستقيمٍ d، كان للمستقيم d معادلة صيغتها $ax + by + c = 0$.
- إذا كانت $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ معادلتي المستقيمين d و d' على التوالي، عندئذ: يكون المستقيمان d و d' متعامدين إذا وفقط إذا كان الشعاعان الموجّهان لهما $\vec{u}(-b,a)$ و $\vec{u}'(-b',a')$ متعامدين أو إذا وفقط إذا كان $aa' + bb' = 0$.

منعكسات يجب امتلاكُها

- فكِّرْ أنه إذا كان مستقيمٌ Δ عموديّاً على مستقيمٍ d معادلته $ax + by + c = 0$، كان $\vec{n}(a,b)$ شعاعاً موجهاً للمستقيم Δ وكان $\vec{u}(-b,a)$ شعاعاً ناظماً عليه.
- عندما تتعرَّفُ شعاعاً $\vec{n}(a,b)$ ناظماً على مستقيمٍ d، فكِّرْ بأنَّ للمستقيم d معادلةً بالصيغة $ax + by + c = 0$.
- فكِّرْ أنه إذا كانت $\mathcal{C}$ دائرةً مركزها النقطة $I(x_0, y_0)$ ونصف قطرها R، كان لها معادلةٌ من الصيغة $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.
- بالعكس، فكِّرْ أنه إذا كانت $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ معادلةً لمجموعة النقاط M التي إحداثيّاتها (x, y) كانت هذه المجموعة دائرةً مركزها $I(x_0, y_0)$ ونصفُ قطرها R.
- لتبيان إذا كانت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادلةً لدائرة، فكِّرْ بكتابتها بالصيغة $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = K$، فإذا كان $K > 0$، كانت معادلةَ دائرةٍ مركزها $I(x_0, y_0)$ ونصف قطرها $\sqrt{K}$.

أخطاءٌ يجبُ تجنُّبها

- **لا** تستعمل معلماً غيرَ متجانسٍ عندما تفكِّرُ في:
  - حساب مسافة.
  - إثبات تعامد مستقيمين.
  - البحث عن معادلة دائرة.

أنشطة

نشاط 1 علاقات خاصّة بالمساحات

① علاقة هيرون Heron

وجدنا فيما سبق مساحة المثلّث بدلالة ضلعين والزاوية المحدّدة بهما: $S = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$. لحساب S بدلالة أطوال الأضلاع a و b و c، علينا حساب $\sin\widehat{A}$ بدلالة a و b و c.

1. استناداً إلى مبرهنة الكاشي لدينا $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$.

a. استنتج منها أنَّ $(4b^2c^2)\sin^2\widehat{A} = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$.

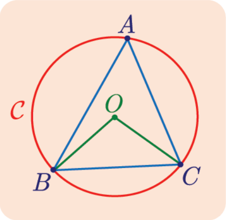
b. نرمز إلى محيط المثلّث ABC بالرمز $2p$، إذن $2p = a + b + c$. أثبت أنَّ:

$$b^2c^2\sin^2\widehat{A} = 4p(p-a)(p-b)(p-c)$$

2. استنتج ممّا سبق أنَّ

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

② مساحة المثلّث والدائرة المارّة برؤوسه



لتكن $\mathscr{C}$ الدائرة المارّة برؤوس المثلّث ABC، وليكن مركزها O ونصف قطرها R.

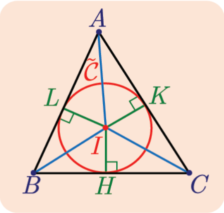
1. في حالة $\widehat{BAC}$ حادة : نعلم، استناداً إلى مبرهنة الزاوية المحيطيّة والزاوية المركزيّة، أنَّ $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$. أثبت أنَّ $\frac{a}{2} = R\sin\widehat{A}$.

2. في حالة $\widehat{BAC}$ منفرجة : نعلم أنَّ $\widehat{BAC} = \pi - \frac{1}{2}\widehat{BOC}$. أثبت أيضاً أنَّ $\frac{a}{2} = R\sin\widehat{A}$.

3. استنتج أنَّ :

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R \quad \text{و} \quad S = \frac{abc}{4R}.$$

③ مساحة المثلّث والدائرة المماسّة لأضلاعه داخلاً

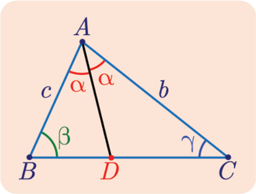


لتكن $\mathscr{C}$ الدائرة المماسة لأضلاع المثلّث ABC داخلاً، وليكن مركزها I ونصف قطرها r. وليكن $2p$ محيط المثلّث ABC، أي $2p = a + b + c$.

بملاحظة أنّ مساحة المثلّث ABC تساوي مجموع مساحات المثلّثات IBC و ICA و IAB أثبت أنّ $S = pr$.

نشاط 2 طول منصّف داخلي

في المثلّث ABC، يقطعُ المنصفُ الداخلي للزاوية $\widehat{A}$ الضلعَ $[BC]$ في النقطة D. لنرمز إلى قياسات $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ على التوالي بالرموز 2α و β و γ.



1.a. تحقّق ممّا يأتي:

$$\frac{DC}{\sin\alpha}=\frac{AD}{\sin\delta}=\frac{b}{\sin\widehat{ADC}} \quad \text{و} \quad \frac{BD}{\sin\alpha}=\frac{AD}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\widehat{BDA}}$$

b. استنتج أنَّ $\frac{DB}{DC}=\frac{c}{b}$ و $b\,\overrightarrow{DB}+c\,\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

2.a. استنتج أنَّ D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B,b) و (C,c).

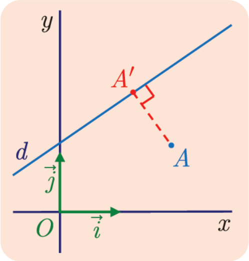
b. أثبت أنَّ $b\,\overrightarrow{AB}+c\,\overrightarrow{AC}=(b+c)\overrightarrow{AD}$.

c. استنتج أنَّ $(b+c)^2AD^2=2b^2c^2(1+\cos\widehat{A})$.

3. أثبت، انطلاقاً ممّا سبق، أنَّ $AD=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\widehat{A}}{2}$.

4. تطبيق: احسب AD في حالة $b=2.4$ و $c=3.2$ و $\widehat{A}=\frac{\pi}{3}$.

نشاط 3 بُعد نقطة عن مستقيم



لتكن $ax+by+c=0$ مع $(a,b)\neq(0,0)$ معادلة لمستقيم d، في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. ولتكن A نقطةً إحداثيّتاها (α,β) و A' هي المسقط القائم للنقطة A على d. الغاية هي حساب المسافة AA' بدلالة a و b و c و α و β.

1. الشعاع $\vec{n}(a,b)$ شعاعٌ ناظمٌ على d. أثبت أنَّ

$$\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AA'}\right|=\|\vec{n}\|\times AA'=\sqrt{a^2+b^2}\times AA'$$

2. A' نقطةٌ من المستقيم d، فإذا رمزنا إلى إحداثيّتيها بالرمز (x,y)، كان $ax+by+c=0$.
احسب مركّبتي الشعاع $\overrightarrow{AA'}$ وأثبت ما يأتي :

$$AA'=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{و} \quad \left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AA'}\right|=\left|-a\alpha-b\beta-c\right|$$

3. **تطبيقات.** وجدنا في السؤال السابق صيغة تفيد في حساب بُعد نقطة عُلمت إحداثيّاتها في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ عن مستقيم عُلِمت معادلةٌ له. فيما يأتي نجد تطبيقين لهذه الصيغة.

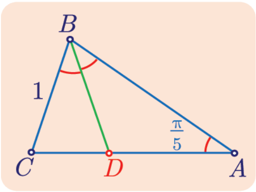
a. لتكن $3x+4y-12=0$ معادلة لمستقيم d. أوجد معادلةً للدائرة C التي مركزها $A(5,3)$ وتمسّ المستقيم d.

b. لتكن $x+\sqrt{3}y-2=0$ معادلة لمستقيم d. أيمسّ المستقيم d الدائرة C التي مركزها O ونصف قطرها 1؟

نشاط 4 إنشاء مخمّس منتظم

هدف هذا النشاط هو إنشاء مخمّس منتظم بالمسطرة والفرجار. نعلم أن قياس الزاوية المركزية المُقابلة لأحد أضلاع مخمّس منتظم يساوي $\frac{2\pi}{5}$ ، فطبيعي إذن، أن يتطلب إنشاءُ هذا المخمّس معرفةَ $\cos(\frac{2\pi}{5})$ و $\sin(\frac{2\pi}{5})$. هذا ما سنسعى إليه في الفقرة الأولى.

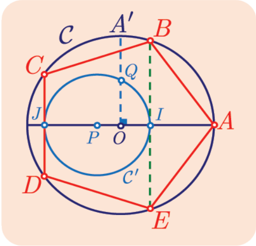
① تمهيد



ABC مثلّث متساوي الساقين في A ، فيه قياس الزاوية $\hat{A}$ يساوي $\frac{\pi}{5}$ ، و $BC = 1$ ، منصف الزاوية $\widehat{ABC}$ يقطع القطعة $[AC]$ في D .

1. أثبت أنَّ المثلّثين BAC و CBD متشابهان وأنَّ $BC^2 = AB \times CD$.
2. نضع $AB = x$. أثبت أنَّ $x(x-1) = 1$ ، واستنتج x .
3. a. أثبت أنَّ $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}$. مستفيداً من المسقط القائم H للنقطة A على (BC).
   b. احسب $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ بأسلوب آخر، واستنتج أنَّ $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
   c. باستعمال دساتير ضعفي زاوية، أثبت أنَّ $\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-\sqrt{5}-1}{4}$.

② إنشاء مخمّس منتظم



$\mathcal{C}$ دائرة مركزها O ونصف قطرها R . $[OA]$ و $[OA']$ نصفا قطرين متعامدان في $\mathcal{C}$. النقطة P معينة بالعلاقة $4\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OA}$ ، والنقطة Q هي منتصف $[OA']$. $\mathcal{C}'$ هي الدائرة التي مركزها P والمارّة بالنقطة Q . نرمز إلى نقطتي تقاطع الدائرة $\mathcal{C}'$ والمستقيم (OA) بالرمزين I و J . المماسان في I و J للدائرة $\mathcal{C}'$ يقطعان الدائرة $\mathcal{C}$ في أربع نقاط تؤلّف مع A رؤوس مخمّس منتظم $ABCDE$.

1. لماذا يكفي لإثبات صحّة الإنشاء، إثبات أنَّ $\widehat{AOB} = \frac{2\pi}{5}$ و $\widehat{AOC} = \frac{4\pi}{5}$ ؟
2. a. احسب PQ بدلالة R واستنتج أنَّ $OI = \frac{R}{4}(\sqrt{5}-1)$.
   b. أثبت أنَّ $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OI}$ ثمَّ احسب $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ بطريقة أخرى لتستنتج قيمة $\cos\widehat{AOB}$.
3. a. احسب $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$ بطريقتين واستنتج حساب $\cos\widehat{AOC}$.
   b. استنتج أنَّ $ABCDE$ مخمَّسٌ منتظم.

نشاط 5 جماعة مستقيمات ومحلٌّ هندسي

① جماعتان من المستقيمات

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، نقرنُ، بكلّ عدد حقيقي m، مستقيماً D_m معادلته

$$(m-1)x+my-m-2=0$$

فمثلاً، عند $m=2$، نحصل على المستقيم D_2 الذي معادلته $x+2y-4=0$. نقول إنَّ المستقيمات D_m هي **جماعة مستقيمات تتبع الوسيط** m.

1. علّل كون الشعاع $\vec{u}_m(m-1,m)$ شعاعاً ناظماً على المستقيم D_m؟

2. a. ارسم D_0 و D_1 و D_2 في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$. ماذا تقول بشأن المستقيمات D_m؟

   b. أثبت أنَّ جميع المستقيمات D_m تمرُّ بنقطة ثابتة A.

3. نقرن، بكل عدد حقيقي m، مستقيماً Δ_m معادلته

$$mx+(1-m)y-m=0$$

   a. علّل كون الشعاع $\vec{v}_m(m,1-m)$ شعاعاً ناظماً على المستقيم Δ_m؟

   b. على الرسم السابق، ارسم Δ_0 و Δ_1 و Δ_2. ماذا تقول بشأن المستقيمات Δ_m؟

   c. أثبت أنَّ جميع المستقيمات Δ_m تمرُّ بنقطة ثابتة B.

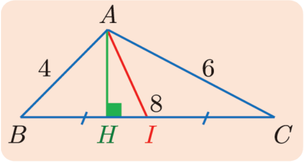
② المحل الهندسّي للنقاط M، نقاط تقاطع Δ_m و D_m.

1. أثبت أنه، عند قيمة معطاة للوسيط m، يكون Δ_m و D_m متعامدين.
2. لتكن M نقطة تقاطع المستقيمين Δ_m و D_m. بيِّن أنّ $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.
3. أثبت أنّ M تنتمي إلى الدائرة $\mathcal{C}$ التي قطرها $[AB]$. وأعطِ معادلةً للدائرة $\mathcal{C}$.

لقد أثبتنا أنّ المحلّ الهندسي للنقاط M محتوى في الدائرة $\mathcal{C}$، ولكننا لم نثبت أنّه كامل الدائرة $\mathcal{C}$، لأنّ ذلك يتطلب أن نبرهن أنّ كلَّ نقطة M من $\mathcal{C}$ هي نقطة تقاطع مستقيمين Δ_m و D_m عند قيمة للعدد الحقيقي m. في الحقيقة، يمكننا أن نثبت أنّ المحلّ الهندسي للنقاط M هي الدائرة $\mathcal{C}$ محذوفاً منها النقطة B.

تمرينات ومسائل

1 ABC مثلّث، I منتصف $[BC]$ و H هي المسقط القائم للنقطة A على $[BC]$. نفترض أنَّ $AB=4$ و $AC=6$ و $BC=8$.



1. أيّةُ مبرهنة تفيد في حساب AI ؟ أنجزْ هذا الحساب.
2. أيّةُ مبرهنة تفيد في حساب $\cos\widehat{BAC}$ ؟ أنجزْ هذا الحساب واستنتج $\sin\widehat{BAC}$.
3. احسب مساحة المثلّث ABC واستنتج أنَّ $AH=\frac{3}{4}\sqrt{15}$.

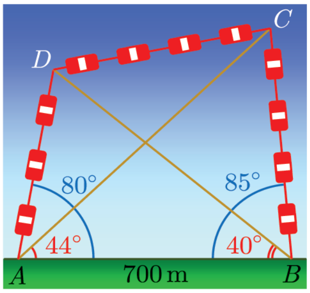
2 أطوال أضلاع المثلّث ABC هي $AB=8$ و $AC=3$ و $BC=7$.

1. احسب $\cos\widehat{BAC}$ واستنتج $\sin\widehat{BAC}$.
2. احسب مساحة المثلّث ABC.

3 $ABCD$ متوازي أضلاع فيه $AB=7$ و $AC=8$ و $AD=3$.

1. أثبت $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=3$. ثمّ احسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ بطريقة ثانية واستنتج قيم $\sin\widehat{BAD}, \cos\widehat{BAD}$.
2. احسب مساحة المثلّث ABD واستنتج مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$.

4 صُمِّم حوضٌ لتربية الأسماك على شاطئ بحيرة بشكل رباعي $ABCD$، على أن تكون المسافة المشغولة من الشاطئ $AB=700\,\mathrm{m}$، كما في الشكل المجاور. ويمثّل المقدار $AD+DC+CB=\ell$ طول الشبكة اللّازمة للإحاطة بالحوض داخل البحيرة.



1. احسب $\widehat{ADB}$ واستنتج AD و DB.
2. بأسلوب مماثل، وباستعمال المثلّث ABC، احسب BC.
3. استخدم مبرهنة الكاشي لحساب CD، ثمَّ استنتج طول الشبكة ℓ.
4. احسب مساحة الحوض بالمتر المربع.

5 احسب $\cos 2x$، في كلٍّ من الحالات الآتية:

❶ $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ❷ $\cos x=\frac{3}{5}$ ❸ $\sin x=-\frac{1}{3}$.

6 تحقّق من صحّة كلٍّ ممّا يأتي :

❶ $(\cos x-\sin x)^2=1-\sin 2x$ ❷ $\cos x+\cos(\frac{2\pi}{3}+x)+\cos(\frac{4\pi}{3}+x)=0$

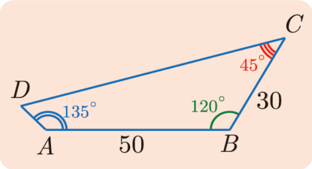
❸ $\sin(\frac{\pi}{3}+x)-\sin(\frac{\pi}{3}-x)=\sin x$ ❹ $1+2\cos x+\cos 2x=2\cos x(1+\cos x)$

لنتعلّم البحث معاً

7 حساب مساحة شكل رباعي ومحيطه

$ABCD$ رباعي محدّب فيه $AB = 50\,\text{m}$ و $BC = 30\,\text{m}$ و $\widehat{ABC} = 120°$ و $\widehat{BCD} = 45°$ وأخيراً $\widehat{BAD} = 135°$. احسب محيط ومساحة الرّباعي $ABCD$.

نحو الحلّ



- قد يكون من المفيد رسم شكلٍ يساعد في توجيه الحسابات. هذا رسمٌ تقريبي وضعنا عليه جميع معطيات المسألة. بتفحّص الشكل يمكننا أن نستنتج ما يأتي : لمّا كان الشكل الرباعي المدروس محدّباً استنتجنا أنّ مجموع زواياه يساوي $360°$. ما قياس الزاوية $\widehat{ADC}$ ؟
- يكفي لحساب المحيط أن نحسب كلّاً من AD و DC. ولكنّ الحساب المباشر غير ممكن، ومنه تأتي فكرة رسم $[AC]$ و $[BD]$ كي نتمكن من الاستفادة من دساتير المثلّث. في المثلّث ABC تكفي المعطيات لحساب AC، ومن ثَمّ تعيين بقيّة عناصر المثلّث.

1. أثبت أنّ $AC = 70\,\text{m}$.
2. أثبت أنّ $\sin \widehat{BCA} = \dfrac{5\sqrt{3}}{14}$ و $\sin \widehat{BAC} = \dfrac{3\sqrt{3}}{14}$.
3. استنتج قيماً تقريبيّة للزوايا $\widehat{DCA}$ و $\widehat{DAC}$ و $\widehat{ADC}$.
4. استنتج قيماً تقريبيّة للأطوال DC و DA. واستنتج المطلوب.

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

8 معادلة الدائرة المارّة بثلاث نقاط

نتأمّل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ النقاط $A(4,1)$ و $B(0,6)$ و $C(-2,1)$. اكتب معادلة $\mathcal{C}$ المارّة برؤوس المثلّث ABC.

نحو الحلّ

- لنبدأ برسم المعلم، ولنوضّع فيه النقاط ولننشئ عليه الدائرة المطلوبة. بالطبع، لإنشاء $\mathcal{C}$ يكفي تعيين مركزها I، لأنّها تمرّ بالنقاط A و B و C.

لماذا تعتقد أنّه، لتعيين I، من المفيد اختيار محور القطعة $[AC]$، ثُمّ محور أحد الضلعين الآخرين ؟ أنشئ I وارسم الدائرة $\mathcal{C}$.

✌ لكتابة معادلة الدائرة $\mathcal{C}$، يمكننا مثلاً البدء بتعيين إحداثيّات مركزها I، ثُمّ نعيِّن نصف قطرها الذي يساوي IA أو IB أو IC. إنّ فاصلة I معروفة، إذن يكفي تعيين ترتيبها.
ولتحقيق ذلك يكفي مثلاً أن نقول إنّ I تنتمي إلى محور $[AB]$ أي $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{AB}=0$، و J منتصف $[AB]$.

1. ما فاصلة I؟ وما إحداثيّات النقطة J؟
2. عيّن ترتيب النقطة I بكتابة $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.
3. استنتج معادلة للدائرة $\mathcal{C}$.

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

9 جماعة دوائر

نتأمّل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ النقطتين $A(3,2)$ و $B(-1,4)$ ونرمز بالرمز $\mathcal{E}$ إلى مجموعة الدوائر التي تمرّ بالنقطتين A و B. اكتب معادلة دائرة ما $\mathcal{C}$ من $\mathcal{E}$.

نحو الحلّ

☝ نريد كتابة معادلة دائرة ما تمرّ بالنقطتين A و B. لنرسم شكلاً يعطينا فكرة عن خصوصيّات هذه المسألة.
ارسم شكلاً توضّح فيه المعلم المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ والنقطتين A و B، ودائرة من دوائر المجموعة $\mathcal{E}$. إلى أيِّ مجموعة Δ تنتمي مراكز جميع دوائر المجموعة $\mathcal{E}$؟ ارسم المجموعة Δ.

✌ لإيجاد معادلة الدائرة $\mathcal{C}$، تكفي معرفة إحداثيّات مركزها، ونصف قطرها. وعند معرفة إحداثيّات M مركز دائرة من $\mathcal{E}$ يمكننا إيجاد معادلة هذه الدائرة لأنها تمر بالنقطتين A و B. بالطبع إنّ M تقع على Δ ومن الواضح أنّ كلّ نقطة من Δ تصلح لأن تكون مركزاً لدائرة من $\mathcal{E}$. إذن يمكن أن تكون فاصلة M أي عدد حقيقي m.

1. اكتب معادلةً للمستقيم Δ، ما ترتيب النقطة M من Δ التي فاصلتها m؟
2. أثبت أنّ معادلة الدائرة $\mathcal{C}_m$ من $\mathcal{E}$ التي مركزها M هي

$$x^2+y^2-2mx-2(2m+1)y+14m-9=0$$

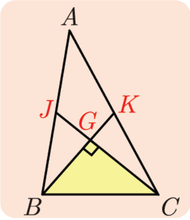
3. علّل كون الدائرة $\mathcal{C}_1$ الموافقة لحالة $m=1$ هي الدائرة التي قطرها $[AB]$.

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

10 خاصّة مميِّزة لمثلث

ميِّز المثلّثات التي فيها متوسّطان متعامدان بعلاقة تربط بين أطوال أضلاعها.

نحو الحلّ



تبدو المسألة صعبةً، لأنّ نصّ المسألة لا يعطي العلاقة التي يجب إثباتها. ولكن لمّا كانت المسألة تتعلّق بالمتوسّطات، فإنّ هذا يوحي لنا بالاستفادة من المبرهنة المتعلّقة بالمتوسّطات. يمكننا إذن أن نتبّع الأسلوب الآتي:

- نفترض أنّ المتوسطين (BK) و (CJ) في مثلّث ABC متعامدان، ولتكن G نقطة تلاقيهما.
- ثُمّ نبحث انطلاقاً من الفرض عن علاقة بين الأطوال AB و AC و BC. إحدى نتائج الفرض هي أنّ $BC^2 = BG^2 + GC^2$.

1. علّل صحّة المساواتين $BG^2 = \frac{4}{9}BK^2$ و $GC^2 = \frac{4}{9}CJ^2$.
2. بالاستفادة من مبرهنة المتوسّط، احسب كلّاً من GB^2 و GC^2 بدلالة أضلاع المثلّث ABC واستنتج أنّ $AB^2 + AC^2 = 5BC^2$.

إذن، إذا كان المتوسّطان (BK) و (CJ) في مثلّث ABC متعامدين كان $AB^2 + AC^2 = 5BC^2$.

ولكن هل تميِّز هذه العلاقة هذا النوع من المثلّثات؟ أي هل يقتضي تحقّقها في مثلّث ABC أن يكون المتوسّطان (BK) و (CJ) متعامدين؟

1. ليكن I منتصف $[BC]$، أثبت أنّ

$$\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} = GI^2 - IC^2 = \frac{1}{36}(4IA^2 - 9BC^2)$$

2. تحقّق أنّ $4IA^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - BC^2$
3. واستنتج أنّ $AB^2 + AC^2 = 5BC^2$ يقتضي $\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} = 0$.

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

11 تعيين مجموعة نقاط تحليليّاً

نتأمّل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ النقطتين $A(-3,-1)$ و $B(5,3)$. عيّن $\mathcal{E}$ مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي يكون عندها الشعاعان $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ و $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}$ متعامدين.

نحو الحلّ

في الحقيقة، إنّ تعامد الشّعاعين $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}$ و $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ يعني انعدام جدائهما السلّمي.

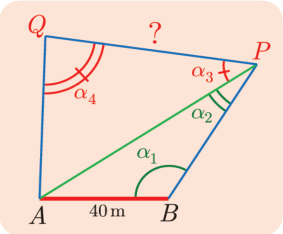
1. احسب بدلالة x و y مركّبات الشّعاعين $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ و $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}$.
2. أثبت أنّ $\mathcal{E}$ هي مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تُحقّق $x^2+y^2-2x-2y-\frac{2}{9}=0$
3. استنتج أنّ $\mathcal{E}$ هي دائرة يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

يمكن أيضاً التفكير بحلٍّ شعاعي. في الحقيقة، ليكن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(A,2)$ و $(B,1)$، وليكن J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(A,1)$ و $(B,2)$ ؟
استفد من خواصّ مركز الأبعاد المتناسبة، لتثبت أنّ $\mathcal{E}$ هي مجموعة النقاط M التي تُحقّق $\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ}=0$، أي إنها الدائرة التي قطرها $[IJ]$.

قُدُماً إلى الأمام

12 مثال على التثليث



نفترض أننا نعرف بدقة المسافة بين نقطتين A و B في موقع مرتفع وأنّ هذه المسافة تساوي $40\,\text{m}$، ونريد الاستفادة من ذلك في حساب المسافة بين نقطتين P و Q. لتحقيق ذلك نتّبع الأسلوب المعروف باسم التثليث، فنقيس الزوايا:

$\alpha_1=\widehat{ABP}$ و $\alpha_2=\widehat{APB}$ و $\alpha_3=\widehat{APQ}$ و $\alpha_4=AQP$.

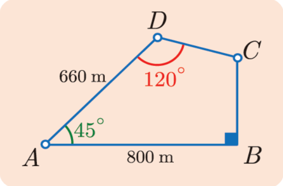
1. a. أثبت أنّ $AP=\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}AB$ وأنّ $PQ=\dfrac{\sin(\alpha_3+\alpha_4)}{\sin\alpha_4}AP$.

b. استنتج أنّ $PQ=\dfrac{\sin\alpha_1\sin(\alpha_3+\alpha_4)}{\sin\alpha_2\sin\alpha_4}AB$.

2. تطبيق. احسب PQ لأقرب متر في الحالة التي يكون فيها:

$\alpha_1=120°$ و $\alpha_2=4°$ و $\alpha_3=60°$ و $\alpha_4=105°$

13



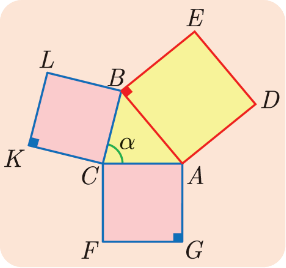
يمثِّلُ الشكلُ $ABCD$ المرسوم جانباً، حقلاً.

1. احسب طول محيط هذا الحقل.
2. احسب مساحة سطحه.

14 ABC مثلّث، فيه $AB = 13$ ، $AC = 14$ ، $BC = 15$. و H هي المسقط القائم للنقطة B على (AC) .

1. أثبت أنَّ $\sin \widehat{B} = \frac{56}{65}$.
2. استنتج مساحة المثلّث ABC ، وكذلك الأطوال BH و AH و HC .

15 في حالة الشكل المرسوم جانباً، نكتب α دلالة على قياس الزاوية $\widehat{BCA}$. و S_1 دلالة على مجموع مساحتي المربعين $ACFG$ و $BCKL$ ، و S_2 مجموع مساحتي المربع $ABDE$ والمثلّث ABC .



أثبت تكافؤ القضيتين $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{Q})$ الآتيتين:

$(\mathcal{P}) : S_1 = S_2$ و $(\mathcal{Q}) : \tan \alpha = 4$.

16 نتأمّل النقطتين $A(8,0)$ و $B(0,6)$ ، و I منتصف $[AB]$ ، و H المسقط القائم للنقطة O على $[AB]$

1. أعطِ معادلةً للمستقيم (AB) ومعادلة للمستقيم (OH) ، ثمَّ استنتج إحداثيّتي النقطة H .
2. ليكن E المسقط القائم للنقطة H على محور الفواصل، وليكن F المسقط القائم للنقطة H على محور التراتيب. أثبت أنَّ المستقيمين (OI) و (EF) متعامدان.

17 مستقيم سيمسون في المثلث

نُعطى النقاط $A(6,0)$ و $B(0,6)$ و $C(-2,0)$.

1. وضِّعْ هذه النقاط في معلمٍ متجانس وارسم الدائرة $\mathcal{C}$ المارّة برؤوس المثلّث ABC ، ثمَّ اكتب معادلةً لها.
2. لتكن M النقطة من $\mathcal{C}$ ، التي لها ترتيب B ، والمختلفة عن B . ولتكن I و J و K المساقط القائمة للنقطة M على المستقيمات (AC) و (AB) و (CB) بالترتيب.
   a. احسب فاصلة M .
   b. اكتب معادلةً لكلٍّ من المستقيمات (AB) و (BC) و (MJ) و (MK) .
   c. استنتج إحداثيّات النقاط I و J و K .
3. أثبت وقوع النقاط I و J و K على مستقيم واحد، نسمّيه مستقيم سيمسون.

في الحقيقة تبقى الخاصّة السابقة صحيحة مهما كان موضع النقطة M على الدائرة المارّة برؤوس المثلّث ABC .

18 من خواص نقطة تلاقي الارتفاعات

لتكن $x^2+y^2-2x-2y-8=0$ معادلةً للدائرة $\mathcal{C}$.

1. احسب إحداثيّتي I مركز هذه الدائرة واحسب نصف قطرها، ثمَّ ارسمها.
2. تقطعُ الدائرةُ $\mathcal{C}$ محورَ الفواصل في A و B ومحور التراتيب في C و D. ولقد اخترنا أن يكون ترتيب D سالباً.

a. احسب إحداثيّات النقاط A و B و C و D.

b. أثبت أنَّ صورة D وفق التناظر القائم الذي محوره (AB) هو نقطة تلاقي ارتفاعات المثلّث ABC.

في الحقيقة، بوجه عام، تقع نظائر نقطة تلاقي ارتفاعات مثلّث بالنسبة إلى أضلاعه، على الدائرة المارّة برؤوسه.

19 لتكن $x^2+y^2-6x-2y-15=0$ معادلةً للدائرة $\mathcal{C}$، ولتكن $4x+3y=0$ معادلةً لمستقيم Δ.

1.a. ارسم كلّا من الدائرة $\mathcal{C}$ والمستقيم Δ.

b. أنشئ Δ_1 و Δ_2 مماسي الدائرة $\mathcal{C}$ الموازيَيْن للمستقيم Δ.

2.a. اكتب معادلةً للمستقيم d، المارّ بمركز الدائرة $\mathcal{C}$ والعموديّ على المستقيم Δ.

b. أثبت أنَّ المستقيم d يقطع الدائرة $\mathcal{C}$ في نقطتين A و B تُطلب إحداثيّاتهما.

c. استنتج معادلةً لكلٍّ من المُماسين Δ_1 و Δ_2.

20 a و b عددان من المجال $[0,\frac{\pi}{2}]$ يُحقّقان $\cos a=\dfrac{3}{5}$ و $\sin b=\dfrac{1}{2}$. احسب المقادير $\sin a$ و $\cos b$ واستنتج قيم $\cos(a+b)$ و $\sin(a-b)$.

21 لتكن النقطتان $A(6,0)$ و $B(0,3)$. نرمز في حالة عددٍ حقيقي k بالرمز $\mathcal{L}_k$ إلى مجموعة النقاط M التي تُحقِّق : $MO^2+MA^2+MB^2=k$.

1. أثبت تكافؤ الخاصّتين: « $M(x,y)$ نقطةٌ من $\mathcal{L}_k$ » و « $x^2+y^2-4x-2y+15=\dfrac{k}{3}$ »
2. ناقش تبعاً لقيم k طبيعة $\mathcal{L}_k$.

22 a و b عددان من $[0,\frac{\pi}{2}]$، يُحقّقان $\sin a=\dfrac{1}{2}$ و $\sin b=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

1. احسب $\cos a$، وتحقّق أنَّ $\cos b=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
2. احسب $\cos(a+b)$ و $\sin(a+b)$، واستنتج $a+b$ ثمَّ b.

23 x عددٌ من المجال $]0,\frac{\pi}{2}[$. أثبت أنَّ

$$\tan x = \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$$

ثمَّ استنتج قيم $\tan\frac{\pi}{8}$ و $\tan\frac{\pi}{12}$.

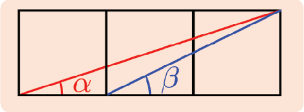
24 أثبت صحّة ما يأتي:

① $4\cos^2 x + 2\sin^2 x = 3 + \cos 2x$.

② $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$.

③ $\sin(a+b)\cos(a-b) + \cos(a+b)\sin(a-b) = \sin 2a$.

25 ثلاثةُ مربّعاتٍ طول ضلع كلٍّ منها يساوي a وهي مرتبة كما في الشكل المجاور و α و β هما قياسا الزاويتين $\widehat{BAE}$ و $\widehat{CBE}$ بالراديان.

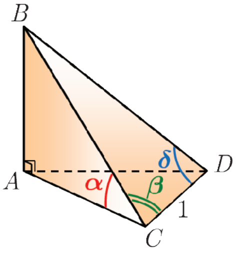


1. احسب $\cos\alpha$ و $\sin\alpha$ و $\cos\beta$ و $\sin\beta$.

2. استنتج أنَّ $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

26 $ABCD$ رباعي وجوه فيه المستقيم (AB) عموديٌّ على المستوي (ACD) و $CD=1$. نعرف

$$\widehat{ACB}=\alpha \text{ و } \widehat{BCD}=\beta \text{ و } \widehat{CDB}=\delta$$



a.1 أثبت أنَّ $BC=\frac{\sin\delta}{\sin(\beta+\delta)}$.

b. استنتج أنَّ $AB=\frac{\sin\alpha\sin\delta}{\sin(\beta+\delta)}$.

2. احسب طول $[AB]$ عندما $\alpha=\beta=\frac{\pi}{4}$ و $\delta=\frac{\pi}{3}$.

27 ليكن x عدداً حقيقياً.

1. أثبت أنَّ

$8\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x = \sin 8x$.

2. أثبت أنَّ $\sin\frac{8\pi}{7}=-\sin\frac{\pi}{7}$ ، واستنتج أنَّ

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=-\frac{1}{8}$$

3. أثبت بأسلوب مماثل أنَّ

$\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{8}$.

28 القطع الزائد والاشتقاق

نتأمّل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ الخطّ البياني $\mathcal{H}$ للقطع الزائد المُمَثِّل للتابع $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{x}$.

لتكن A و B نقطتين من $\mathcal{H}$ فاصلتيهما x_1 و x_2 بالترتيب. ونفترض أنّ $0 < x_1 < x_2$. يقطع المستقيم العموديّ على (AB) في A القطع الزائد $\mathcal{H}$ مجدّداً في نقطة C نرمز إلى فاصلتها بالرمز x_3.

الهدف من هذه المسألة هو إثبات أنّ المماس في A للقطع $\mathcal{H}$ عموديّ على (BC).

1. أثبت أنّ $x_1^2 x_2 x_3 + 1 = 0$.

a.2 اكتب معادلةً للمستقيم d المماس في A للقطع $\mathcal{H}$.

b. أثبت أنّ المستقيمين (BC) و d متعامدان.

5

التحاكي

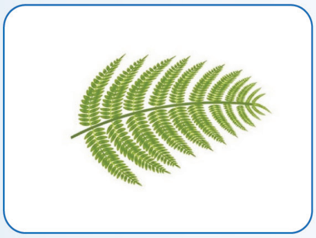
1. التحاكي في المستوي
2. صورة مستقيم، وصورة قطعة مستقيمة، وصورة دائرة
3. خواصّ التحاكي ومفاعيله

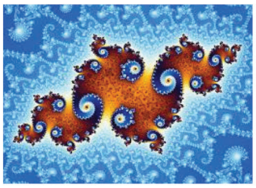
هندسة التحويلات هي مُقاربةُ علم الهندسة انطلاقاً من التحويلات الهندسيّة مثل الانسحابات والدورانات والتناظرات والتحاكيات وخواص الأشكال التي تُحافظ عليها هذه التحويلات، وذلك بدلاً من المُقاربة الإقليديّة التي تعتمد على الإنشاءات الهندسيّة والأشكال. درسنا سابقاً الانسحابات والدورانات والتناظرات وهي جميعاً تنقل الشكل إلى شكل يُطابقه فهي مسؤولة عن مفهوم الأشكال الطبوقة، أمّا التحاكيات فهي مسؤولة عن مفهوم التشابه: التصغير والتكبير.

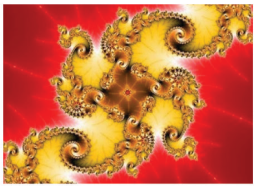
كثيراً ما نجد في الطبيعة أشكالاً ذاتية التشابه، بمعنى أنّ أيّ جزء منها يشابه (يحاكي) الكلّ، تسمّى هذه الأشكال أشكالاً كَسوريّة أو فراكتالية *Fractals* . وفي جسم الإنسان القصبات الرئويّة مثال مهمّ على هذه الأشكال.

تشابه ذاتي في الطبيعة

أمّا الأشكال المتشابهة ذاتيّاً المبيّنة فيما يأتي فهي من تصميم الإنسان:

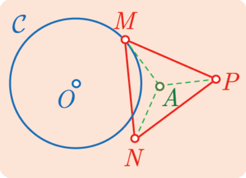






التحاكي

انطلاقة نشطة



في مستوٍ موجّه، $\mathcal{C}$ دائرةٌ مركزها O، و A نقطةٌ لا تقع على $\mathcal{C}$ ومختلفة عن O. ترسمُ نقطةٌ M الدائرة $\mathcal{C}$ ونرمز بالرمز MNP إلى المثلّث المتساوي الأضلاع، المباشر وفق التوجيه المألوف للمستوي، والذي مركز ثقله A. أي $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}) = \frac{\pi}{3}$.

نهدف إلى إيجاد المحلّ الهندسي $\mathcal{L}_1$ للنقطة N، والمحلّ الهندسي $\mathcal{L}_2$ للنقطة P عندما ترسم M الدائرة $\mathcal{C}$.

الدائرة $\mathcal{C}$، والنقطة A عنصران ثابتان في الشكل. بالنظر إلى المثلّث المتساوي الأضلاع MNP يتبادر إلى الذهن استخدام دوران مركزه أيّ واحدة من النقاط M أو N أو P أو A، ولكنّ A ثابتة. إذن سنتأمّل الدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه A وزاويته $120°$.

1. a. ما صورة M وفق $\mathcal{R}$؟
   b. استنتج المحلّ الهندسي $\mathcal{L}_1$ للنقطة N، وأنشئه.
2. استنتج المحلّ الهندسي $\mathcal{L}_2$ للنقطة P، وأنشئه.

1 التحاكي في المستوي

1.1. تعريف

تعريف 1

O نقطة مفترضة من المستوي و k **عدد حقيقي غير معدوم**. نسمي **تحاكياً** h مركزه O ونسبته k، التحويلَ الذي يقرن بكلّ نقطةٍ M من المستوي نقطةً M' تحقّق $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$. ونرمز إلى هذا التحويل بالرمز $h_{O,k}$.

تسمى النقطة M' صورة النقطة M وفق التحاكي h، أو مُحاكية M ونكتب $M \overset{h}{\mapsto} M'$ أو $M' = h(M)$.

نتائج

- إذا كانت M' صورة M وفق $h_{O,k}$، وقعت النقاط O و M و M' على استقامة واحدة وكان $OM' = |k|OM$.
- صورة النقطة O هي O نفسها.

في الحقيقة، نستنتج من المساواة $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ أنَّ الشعاعين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OM'}$ مرتبطان خطّياً، فالنقاط O و M و M' تقع على استقامة واحدة. كما نستنتج أنَّ $OM' = |k|OM$ من $\|\overrightarrow{OM'}\| = |k| \times \|\overrightarrow{OM}\|$.

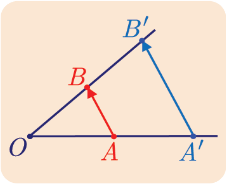
فإذا كانت $h(O) = O'$، استنتجنا من المساواة الشّعاعيّة $\overrightarrow{OO'} = k\overrightarrow{OO} = \vec{0}$ أنّ $O' = O$.

2.1.خاصةأساسية

مُبرهَنة 1

ليكن h التحاكي الذي مركزه O ونسبته k. ولتكن A' و B' صورتي A و B وفق h. عندئذ:

$$\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$$



الإثبات

لدينا $h(A) = A'$ و $h(B) = B'$ إذن

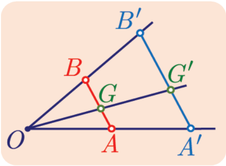
$$\overrightarrow{OA'} = k\,\overrightarrow{OA} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{OB'} = k\,\overrightarrow{OB}$$

ولمّا كان $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'}$ استنتجنا أنّ $\overrightarrow{A'B'} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = k\overrightarrow{AB}$.

نتائج

نحتفظ برموز المبرهنة 1.

1. في حالة $k \neq 0$، إذا كان $A \neq B$، كان $A' \neq B'$. وكان المستقيم $(A'B')$ موازياً المستقيم (AB).
2. أيّاً كانت النقطتان A و B، كان $A'B' = |k| \times AB$. لأن $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$. فالتحاكي الذي نسبته k يضرب الأطوال بالعدد $|k|$.
3. إذا كان G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) و (B,β)، كان $G' = h(G)$ هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A',α) و (B',β).



في الحقيقة، لدينا $\alpha\,\overrightarrow{GA}+\beta\,\overrightarrow{GB}=\vec{0}$. وعملاً بالمبرهنة 1 لدينا $\overrightarrow{G'A'}=k\,\overrightarrow{GA}$ و $\overrightarrow{G'B'}=k\,\overrightarrow{GB}$، إذن $\alpha\,\overrightarrow{G'A'}+\beta\,\overrightarrow{G'B'}=k(\alpha\,\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB})=\vec{0}$. وهذا يثبت أنّ G' هو مركزُ الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A',α) و (B',β).

فنقول إنَّ **التحاكي يحافظ على مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين**، وهو بوجه عامّ يحافظ على مركز الأبعاد المتناسبة لأيّ عددٍ من النقاط اعتماداً على الخاصّة التجميعيّة.

تكريساً للفهم

كيف ننتقل من تحاكٍ إلى مساواةٍ شعاعية، وبالعكس؟

- استناداً إلى التعريف 1. نعبر شعاعيّاً عن كون N' صورة N وفق التحاكي $h_{A,-2}$ بكتابة ما يأتي:

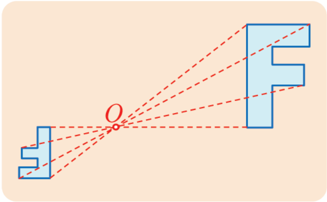
$$\overrightarrow{AN'}=-2\overrightarrow{AN}$$

مركز ← A، صورة ← N'، نسبة ← -2، مركز ← A، نقطة ← N

- للتعبير بلغة التحاكي عن المساواة $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ مع $k\neq 0$. نرمز بالرمز h إلى التحاكي الذي مركزه A ونسبته k ونضع $h(B)=B'$. فيكون $\overrightarrow{AB'}=k\,\overrightarrow{AB}$، أي $\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AC}$ ومنها $B'=C$. وهكذا يمكننا استنتاج أنَّ C هي صورة B وفق التحاكي $h_{A,k}$.

مثال

هذه هي صورة F وفق تحاكٍ مركزه O ونسبته تساوي $-\frac{1}{2}$.



أيوجد، في حالة ثلاث نقاط مختلفة على استقامة واحدة A و B و C، تحاكٍ h مركزه A يُحقّق $h(B)=C$؟

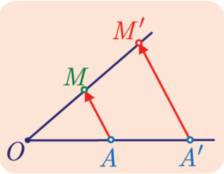
- نعم، لأنَّ التعبير الشعاعيّ عن وقوع النقاط A و B و C على استقامة واحدة هو أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطياً، أي يوجد عددٌ حقيقي غير معدوم k يُحقّق $\overrightarrow{AC}=k\,\overrightarrow{AB}$، وهذا يعني أنّ C هي صورة B وفق التحاكي $h_{A,k}$. وهذا التحاكي وحيد لأنّ k وحيد. نعبِّر عن ذلك عمليّاً بالقول إنَّ h هو التحاكي الذي مركزه A وينقل B إلى C.

مثال طريقةٌ لإنشاء صورة نقطة وفق تحاكٍ

O و A و A' ثلاث نقاط مختلفة واقعة على استقامة واحدة. نرمز بالرمز h إلى التحاكي الذي مركزه O وينقل النقطة A إلى النقطة A'. أنشئ النقطة M' صورة النقطة M وفق h في كلٍّ من الحالتين الآتيتين.

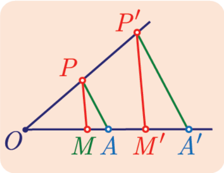
1. النقطة M لا تنتمي إلى المستقيم (OA).
2. M نقطةٌ من (OA) مختلفة عن كلٍّ من O و A.

الحل



1. $M' = h(M)$، إذن M' نقطةٌ من المستقيم (OM). وعملاً بالخاصّة الأساسية $\overrightarrow{A'M'} = k\,\overrightarrow{AM}$، وعليه يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{A'M'}$ مرتبطين خطّياً.

إذن M' هي نقطة تقاطع المستقيم (OM) مع المستقيم المرسوم من A' موازياً (AM).



2. في الحالة الثانية تكون M' نقطةً من المستقيم (OA). لإنشاء M'، نختار نقطةً P لا تنتمي إلى (OA)، وننشئ صورتها P' ثمَّ نرسم من P' مستقيماً يوازي (PM) فيقطع (OA) في النقطة M' تلك التي نبحث عنها.

تَدرَّبْ

① عبِّر عن كلٍّ من المقولات الآتية باستخدام مساواة شعاعيّة:

❶ B هي صورة A وفق التحاكي الذي مركزه I ونسبته -2.

❷ I و J هما بالترتيب صورتا A و B وفق التحاكي $h_{O,1/3}$.

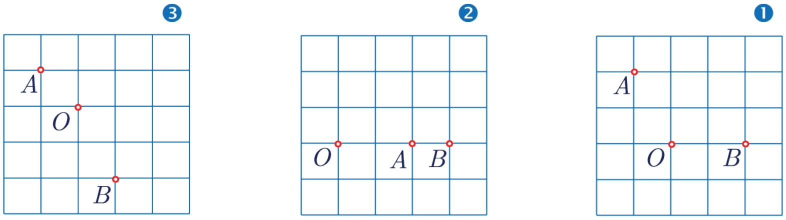
② عبِّر عن كلٍّ من العلاقات الشعاعيّة الآتية باستعمال مفهوم التحاكي:

❶ $\overrightarrow{AB} = -2\,\overrightarrow{AC}$

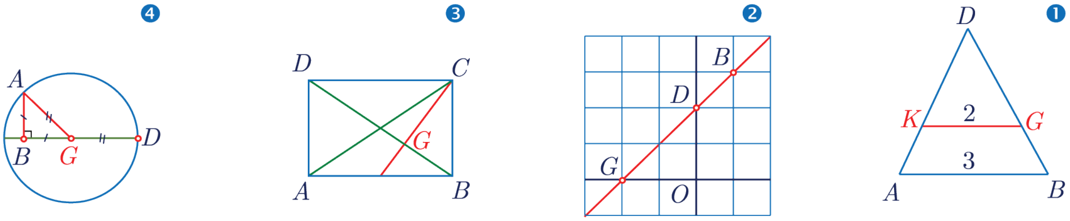
❷ $\overrightarrow{ON} = -2\,\overrightarrow{MO}$

❸ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'} = \vec{0}$

③ في كلٍّ من الأشكال المرافقة، أَثمةَ تحاكٍ h مركزه O ينقل A إلى B؟ وما هي نسبته في حال وجوده؟



④ في كلٍّ من الأشكال الأربعة الآتية، عيّن نسبة التحاكي h الذي مركزه G وينقل B إلى D.



⑤ ABC مثلّثٌ و O نقطةٌ من الضلع $[AC]$. ارسمْ صورة B وفق التحاكي h الذي مركزه O ويحقّق $h(A) = C$.

⑥ $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O، و A' هي نقطة تحقّق $\overrightarrow{OA'} = -2\overrightarrow{OA}$. ارسم صورَ النقاط B و C و D وفق التحاكي الذي ينقل A إلى A'.

⑦ ABC مثلّثٌ، مركز ثقله G.

❶ f هو التحويل الذي يقرن بكلِّ نقطةٍ M من المستوي، نقطةً M' تحقّق

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

.a أثبت أنَّ $\overrightarrow{GM'} = -2\overrightarrow{GM}$.

.b استنتج طبيعة التحويل f.

❷ g هو التحويل الذي يقرن بكلِّ نقطةٍ M من المستوي، نقطةً M' تحقّق

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$$

و D هي النقطة التي تجعل $ABDC$ متوازيَ أضلاع

.a أثبت أنَّ $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DA}$.

.b استنتج أنَّ g انسحابٌ، يطلب إيجاد شعاعه.

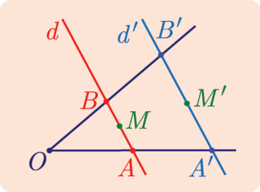
صورة مستقيم، وصورة قطعة مستقيمة، وصورة دائرة

1.2. صورة مستقيم وصورة قطعة مستقيمة

مُبرهَنة 2

صورة مستقيمٍ d وفق تحاكٍ h هي مستقيمٌ d' يوازي d.

الإثبات



نختار على d نقطتين مختلفتين A و B ونعرّف A' و B' صورتيهما بالترتيب وفق التحاكي h. عندئذ $A' \neq B'$ ويوازي المستقيمُ $(A'B')$ المستقيمَ (AB). إنّ d هو مجموعةُ النقاط M مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-\alpha)$ و (B,α) عندما تتحوّل α في $\mathbb{R}$.

لتكن $\mathcal{E}$ صورة d وفق h، هذا يعني أنَّ $\mathcal{E}$ هي مجموعة النقاط $M' = h(M)$. ولأنَّ التحاكي يحافظ على مركز الأبعاد المتناسبة، فإنَّ $\mathcal{E}$ هي مجموعة النقاط M' مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A',1-\alpha)$ و (B',α) عندما تتحوّل α في $\mathbb{R}$. إذن $\mathcal{E}$ هي المستقيم $(A'B')$.

إذا كان مركز التحاكي O نقطةً من d، كان المستقيمُ d' المستقيمَ المارّ بالنقطة $O = h(O)$ موازياً d، أي $d' = d$.

بأسلوب مماثل لما سبق، إذا تذكّرنا أنّ نقاط القطعة المستقيمة $[AB]$ هي مجموعة مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-\alpha)$ و (B,α) عندما تتحوّل α في $[0,1]$، أثبتنا المبرهنة الآتية:

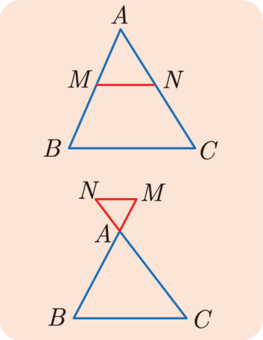
مُبرهَنة 3

صورة قطعةٍ مستقيمة $[AB]$ وفق تحاكٍ h، هي قطعةٌ مستقيمةٌ $[A'B']$ حيث

$$A' = h(A) \quad \text{و} \quad B' = h(B)$$

2.2. المثلّثات المتحاكية

ABC و AMN مثلّثان فيهما M نقطةٌ من (AB)، و N نقطة من (AC) والمستقيم (MN) يوازي (BC). إنّ التحاكي h الذي مركزه A وينقل النقطة B إلى M، ينقل أيضاً النقطة C إلى N.



في الحقيقة، إنّ التحاكي h الذي ينقل النقطة B إلى M، ينقل أيضاً المستقيم (BC) إلى المستقيم المارّ بالنقطة M موازياً (BC)، فصورة C وفق h نقطةٌ من هذا المستقيم، وهي أيضاً نقطة من (AC) فهي إذن نقطة تقاطعهما التي هي النقطة المنشودة N.

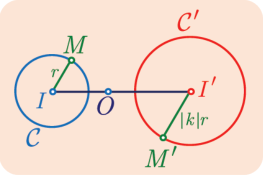
نقول إن المثلّثين ABC و AMN **متحاكيان** والشكل الذي يؤلّفانه شكلٌ مفتاحي عند دراسة التحاكي.

3.2. صورة دائرة

مُبرهَنة 4

صورة دائرة $\mathcal{C}$، مركزها I ونصف قطرها r، وفق تحاكٍ h نسبته k، هي دائرة $\mathcal{C}'$، مركزها $I' = h(I)$ ونصف قطرها $r' = |k|r$.

الإثبات

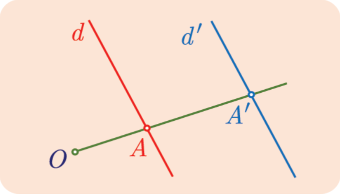


- أيّاً كانت M من $\mathcal{C}$، كان $IM = r$. فإذا كانت M' صورة M وفق h، كان $I'M' = |k| \times IM = |k|r$. إذن تقعُ النقطة M' على الدائرة $\mathcal{C}'$ التي مركزها I' ونصف قطرها $r' = |k|r$.
- بالعكس، إذا كانت N' نقطةً من $\mathcal{C}'$، فهل توجد نقطةٌ N من $\mathcal{C}$ تحقّقُ $h(N) = N'$؟ نعم، إذ يكفي أن نعرّف النقطة N بالعلاقة $\overrightarrow{I'N'} = k\,\overrightarrow{IN}$، عندئذ $h(N) = N'$، ومن العلاقة $I'N' = |k| \times IN$ نستنتج أنّ $IN = r$، أي إنّ N تقعُ على $\mathcal{C}$.

تكريساً للفهم

كيف نستفيد من المبرهنة 2؟

- إذا علمنا A' و B' صورتي نقطتين A و B من مستقيمٍ d وفق تحاكٍ h، عندئذ صورة d وفق h هي المستقيم $(A'B')$.



- إذا علمنا A' صورة نقطة A من مستقيمٍ d وفق تحاكٍ h، عندئذ صورة d وفق h هي المستقيم d' المرسوم من A' موازياً d.
- ولكن بالعكس، إذا كان مستقيمٌ d' مارٌّ بالنقطة A'، صورة A وفق تحاكٍ h، وإذا علمنا أنَّ d' يوازي المستقيم d المارّ بالنقطة A، تيقَّنَّا عندئذ من أنَّ d' هي صورة d وفق h.

ما الصلة بين التحاكي ومبرهنة تالس في المثلث؟

- يظهر من الشكل المفتاحي الذي يمثّل مثلّثين متحاكيين ABC و AMN، تناسب مبرهنة تالس في المثلث بسبب الشرط الأساسيّ «(MN) يوازي (BC)». التحاكي h الذي مركزه A وينقل النقطة M إلى B، ينقل أيضاً N إلى C. فإذا كان $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AM}$، كان أيضاً $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AN}$ و $\overrightarrow{BC} = k\,\overrightarrow{MN}$، إذن

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN} = |k|$$

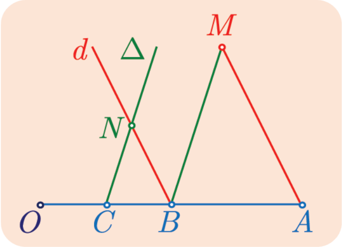
مثال إنشاء صورة نقطة وفق تحاكٍ

لتكن B منتصف القطعة المستقيمة $[AO]$ و C منتصف $[BO]$، ولتكن M نقطةً لا تنتمي إلى المستقيم (AO). نمرِّر بالنقطة B المستقيمَ d موازياً (AM)، ونمرِّر بالنقطة C المستقيم Δ موازياً (BM). فيتقاطع هذان المستقيمان في النقطة N.

لماذا تكون النقطةُ N صورةَ M وفق التحاكي h الذي مركزه O ونسبته $\frac{1}{2}$ ؟

لتعيين النقطة M'، صورةَ النقطة M وفق تحاكٍ h، يمكن الاستفادة من وقوع M عند تقاطع مستقيمين، إذ تقع M' عند تقاطع صورتيهما وفق h.

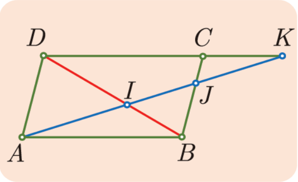
الحل



B هي منتصف $[AO]$ و C هي منتصف $[BO]$، إذن $h(A) = B$ و $h(B) = C$، و h هو التحاكي الذي مركزه O ونسبته $k = \frac{1}{2}$. إنّ صورة المستقيم (AM) وفق h هو المستقيم d المارّ بالنقطة B موازياً (AM)، وصورة المستقيم (BM) وفق h هو المستقيم Δ المار بالنقطة C موازياً (BM).

ولمّا كانت M هي نقطة تقاطع المستقيمين (AM) و (BM)، كانت صورتها وفق h هي نقطة تقاطع المستقيمين d و Δ أي N. إذن $h(M) = N$، وهذا يثبتُ بوجه خاصّ أنَّ N هي منتصف $[OM]$.

تَدرَّبْ



① $ABCD$ متوازي أضلاع. K نقطةٌ على المستقيم (DC) تختلف عن كلٍّ من D و C. يقطعُ المستقيمُ (AK) المستقيمَ (BD) في I والمستقيم (BC) في J. نرمز إلى التحاكي الذي مركزه I وينقل B إلى D بالرمز h.

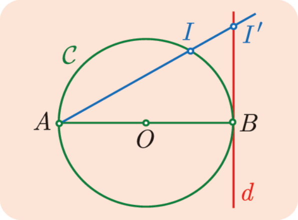
1.a. لماذا تفيد المبرهنة 2 في تأكيد أنَّ صورة المستقيم (AB) هي (DC)؟

b. استنتج أنَّ $h(A) = K$؟

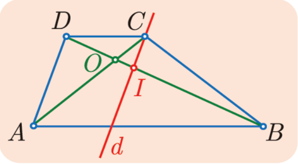
2.a. ما هي صورة المستقيم (BC) وفق h؟

b. استنتج أنَّ $h(J) = A$.

3. نرمز إلى نسبة التحاكي h بالرمز k. استنتج من الأسئلة السابقة أنّ $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK} = k\overrightarrow{IA}$ و $IA^2 = IJ \times IK$.



② المستقيم d مماسٌ للدائرة $\mathcal{C}$ في النقطة B منها. و h هو التحاكي الذي مركزه A، وينقل النقطة I من $\mathcal{C}$ إلى النقطة I'. ارسم النقطة $O' = h(O)$. وارسم الدائرة $\mathcal{C}'$ صورة $\mathcal{C}$ وفق التحاكي h. وأخيراً ارسم المستقيم d' صورة d وفق h.



③ $ABCD$ شبه منحرف فيه $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{DC}$، و O نقطة تلاقي قطريه.

نرمز إلى التحاكي الذي مركزه O وينقل C إلى A بالرمز h.

1.a. لماذا يكون المستقيمُ (DC) صورةَ المستقيم (AB) وفق h؟

b. لماذا نسبةُ التحاكي h تساوي $-\frac{1}{3}$؟

2. يقطع المستقيم d المرسوم من C موازياً (DA) المستقيمَ (DB) في I.

a. لماذا يكون d صورةَ المستقيم (AD) وفق h؟

b. استنتج أنَّ $h(D) = I$.

3. ليكن Δ المستقيم المارّ بالنقطة D موازياً (BC) وقاطعاً (AC) في J.

a. آخذاً بالحقائق التي توصلت إليها، أثبت أنَّ $h(C) = J$.

b. استنتج أنَّ $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$.

3 خواصّ التحاكي ومفاعيله

1.3. المسافة والمساحة

وفق تحاكٍ h نسبته k، تُضربُ المسافات بالعدد $|k|$ ونقبل أنّ المساحات تُضربُ بالعدد k^2.

2.3. المحافظة على المنتصف

إذا كانت النقطتان A' و B'، بالترتيب، صورتي A و B وفق تحاكٍ h، وكانت I منتصف $[AB]$، كانت النقطة $I' = h(I)$ منتصف $[A'B']$.

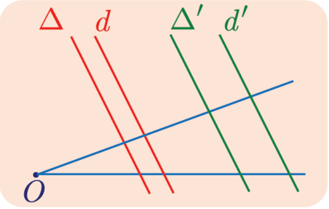
في الحقيقة، يُحافظ التحاكي بوجه عامّ على مركز الأبعاد المتناسبة لنقاط مثقّلة.

3.3. المحافظة على خاصّة الوقوع على استقامة واحدة

إذا وقعت النقاط A و B و C على استقامة واحدة، وقعت صورها A' و B' و C'، وفق تحاكٍ h، على استقامة واحدة أيضاً.

لأنّ صورة المستقيم المارّ بالنقاط A و B و C وفق التحاكي h هي مستقيم.

4.3. المحافظة على خاصّة التوازي



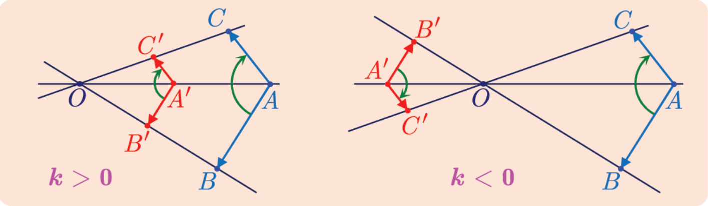
إذا كان مستقيمان d و Δ متوازيين، كانت صورتاهما d' و Δ'، وفق تحاكٍ h، مستقيمين متوازيين.

في الحقيقة، إنّ d و d' متوازيان، وكذلك الأمر بالنسبة إلى Δ و Δ'، إذن d' و Δ' متوازيان. فمثلاً صورة متوازي أضلاع وفق تحاكٍ هي متوازي أضلاع.

5.3. المحافظة على الزوايا الموجّهة

نقبل دون برهان أنّه في مستوٍ موجه، إذا كانت النقاط A و B و C مختلفة مثنى مثنى وكانت A' و B' و C' صور هذه النقاط وفق تحاكٍ h، كان

$$\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'} \quad \text{و} \quad (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$



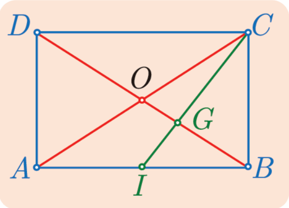
فمثلاً صورتا مستقيمين متعامدين وفق تحاكٍ هما مستقيمان متعامدان. فالتحاكي يحافظ على التعامد.

تكريساً للفهم

ما فائدة خواص التحاكي التي رأيناها؟

- تفيد عند رسم صورة شكل.
- تفيد عند إثبات وقوع نقاط على استقامة واحدة.
- تفيد في إثبات توازي مستقيمين، أو تقاطعهما أو تعامدهما.
- تفيد في مقارنة المساحات.

مثال إنشاء صورة مستطيل وفق تحاكٍ

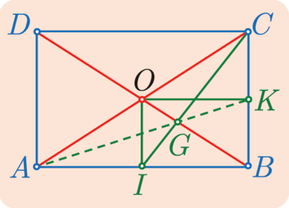


$ABCD$ مستطيلٌ مركزه O، و I منتصف $[AB]$ و G نقطة تقاطع المستقيمين (IC) و (BD). نرمز إلى التحاكي الذي مركزه G ونسبته $-\frac{1}{2}$ بالرمز h. ارسم صورة المستطيل $ABCD$ وفق h.

الحل

نريد رسم صور النقاط A و B و C و D، لكنَّ ثلاثاً منها تكفي، لأنّنا نعلم أنَّ صورة مستطيل وفق تحاكٍ هي مستطيل. وإذا كانت N صورة M، كان $\overrightarrow{GN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GM}$.

النقطة O هي مركز المستطيل فهي منتصف $[AC]$. و I هي منتصف $[AB]$ إذن G هي مركز ثقل المثلّث ABC. ينتج من ذلك أنَّ $\overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$ أي $h(B) = O$، و $\overrightarrow{GI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$ إذن $h(C) = I$. وإذا رمزنا إلى منتصف $[BC]$ بالرمز K، كان $[AK]$ المتوسّط الثالث في المثلّث ABC، إذن $\overrightarrow{GK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$ أي $h(A) = K$. وهكذا نرى أنَّ صورة $ABCD$ هي المستطيل الذي تؤلف النقاط K و O و I ثلاثةً من رؤوسه، أي المستطيل $KOIB$.

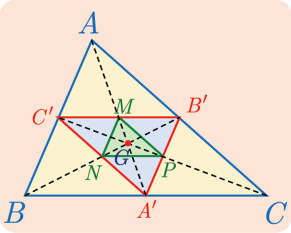


مثال مقارنة مساحات

ABC مثلّثٌ مركزُ ثقله G. والنقاط A' و B' و C' هي بالترتيب منتصفات $[BC]$ و $[CA]$ و $[AB]$. ليكن h التحاكي الذي مركزه G وينقلُ A إلى A'، ولنضع

$$M = h(A') \text{ و } N = h(B') \text{ و } P = h(C')$$

قارن بين مساحتي المثلّثين MNP و ABC.



الحل

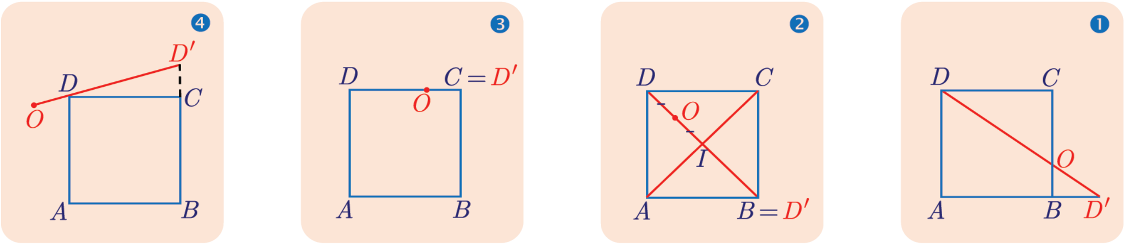
G هو مركز ثقل المثلّث ABC إذن $\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$. نستنتج أنّ نسبة التحاكي h هي $-\frac{1}{2}$.
و $h(B) = B'$ و $h(C) = C'$. فصورة المثلّث ABC وفق h هي المثلّث $A'B'C'$ وصورة المثلّث $A'B'C'$ هي المثلّث MNP. (إذ يمكن، إثبات أنّ M و N و P هي منتصفات أضلاع المثلّث $A'B'C'$). ولما كانت المساحات تضرب بالعدد k^2، تحت تأثير تحاكٍ نسبته k، أمكننا أن نكتب

$$\mathcal{A}(A'B'C') = (-\tfrac{1}{2})^2\mathcal{A}(ABC)$$
$$\mathcal{A}(MNP) = (-\tfrac{1}{2})^2\mathcal{A}(A'B'C')$$

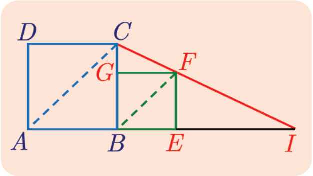
وعليه $\mathcal{A}(MNP) = \frac{1}{16}\mathcal{A}(ABC)$.

تَدَرَّبْ

① في كلٍّ من الحالات الآتية، ارسم صورة المربّع $ABCD$ وفق التحاكي h الذي مركزه O وينقل النقطة D إلى D'.



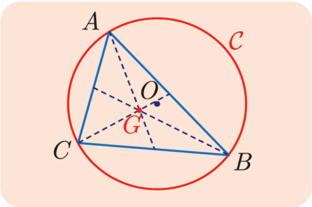
② $ABCD$ و $BEFG$ مربّعان طولا ضلعيهما بالترتيب 3 و 2، ومتوضّعان كما في الشكل.



❶ a. احسب قياس كلٍّ من الزاويتين $\widehat{BAC}$ و $\widehat{EBF}$.
b. استنتج أنَّ المستقيمين (AC) و (BF) متوازيان.

❷ ليكن h التحاكي الذي مركزه I وينقل A إلى B. أثبت أنّ $h(C) = F$، وأنّ نسبة التحاكي h تساوي $\frac{2}{3}$.

❸ لماذا تقع النقاط D و G و I على استقامة واحدة؟



③ في الشكل المقابل، G هو مركز ثقل المثلّث ABC، و $\mathcal{C}$ هي الدائرة المارّة برؤوسه. أعدْ رسم الشكل، وارسم عليه الدائرة $\mathcal{C}'$ صورة $\mathcal{C}$ وفق التحاكي h الذي مركزه G وينقل A إلى منتصف $[BC]$.

④ ABC مثلث، و M نقطة تحقّق $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. المستقيم المارّ بالنقطة M موازياً (AC) يقطع (BC) في N، والمستقيم المارّ بالنقطة N موازياً (AB) يقطع (AC) في P. ليكن h التحاكي الذي مركزه B وينقل A إلى M.

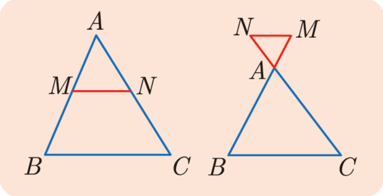
❶ احسب نسبة التحاكي h وعيّن $h(C)$.

❷ أثبت أنَّ $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$، واستنتج أنَّ مساحة المثلّث NPC تساوي رُبع مساحة المثلّث MBN.

أفكار يجب تَمثُّلُها

نرمز بالرمز h إلى التحاكي الذي مركزه O و نسبته k. النقاط A' و B' و M' و ... هي صور النقاط A و B و M و ... وفق h.

- مركز التحاكي O ونقطةٌ M وصورتها $M' = h(M)$ تقع على استقامة واحدة لأنّ $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.
- العلاقة الأساسيّة هي $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.
- ممّا سبق: في حالة $A \neq B$ و $C \neq D$ لدينا $A'B' = |k|AB$ وكذلك $C'D' = |k|CD$ إذن $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$.
- التحاكي تكبيرٌ للأشكال أو تصغيرٌ لها مع حِفْظ النسب. فوفق التحاكي الذي نسبته k، تُضربُ الأطوال بالعدد $|k|$ وتضرب المساحات بالعدد k^2.
- وفق تحاكٍ، صورة مستقيمٍ مستقيمٌ يوازيه، وصورة قطعة مستقيمةٍ قطعةٌ مستقيمة توازيها. وصورةُ دائرةٍ C مركزها I ونصف قطرها R دائرةٌ C' مركزها $I' = h(I)$ ونصف قطرها $R' = |k| \times R$.
- الأشكال المفتاحيّة في التحاكي هي شكل مثلّثين متحاكيين في وضعيّة مبرهنة تالس في المثلّث، ABC و AMN مثلثان متحاكيان مشتركان بالرأس A. التحاكي h الذي ينقل B إلى C ينقل أيضاً M إلى N.



منعكسات يجب امتلاكُها

- لتعيين M' صورة نقطةٍ M وفق تحاك، ابحث عن مستقيمين متقاطعين في M، فتكون M' نقطة تقاطع صورتيهما.
- لإثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة، تمكن الاستفادة من أحد الأسلوبين الآتيين.
  - M وصورتها M' وفق تحاكٍ h ومركز هذا التحاكي هي نقاطٌ واقعة على استقامة واحدة.
  - صورُ ثلاث نقاط على استقامة واحدة وفق تحاك أو انسحاب هي نقاطٌ واقعة على استقامة واحدة.
- فكِّرْ أنَّ التحاكي يفيد في:
  - إثبات توازي مستقيمين أو تعامدهما (صورتا مستقيمين متوازيين أو متعامدين).
  - تلاقي ثلاثة مستقيمات في نقطة واحدة (كأنْ تكون صورَ ثلاثة مستقيمات متلاقية في نقطة واحدة).

أخطاءٌ يجبُ تجنُّبها

- يجب ضرب الأطوال بالعدد $|k|$ وليس بالعدد k، ذلك لأنَّ الطول عدد موجب.

أنشطة

نشاط 1 قطع مستقيمة متحاكية

قطعتان مستقيمتان معلومتان $[AB]$ و $[A'B']$. أتوجد تحاكيات تنقل $[AB]$ إلى $[A'B']$؟ عند الإيجاب، تعرَّفْها.

① حلّ المسألة

1. نفترض أنَّ المستقيمين (AB) و $(A'B')$ غير متوازيين. اشرح لماذا لا يوجد أي تحاك ينقل $[AB]$ إلى $[A'B']$.

2. نفترض أنَّ (AB) و $(A'B')$ متوازيان وأنّ $A \neq A'$ و $AB \neq A'B'$. عندئذ يتقاطع المستقيمان (AA') و (BB') في نقطة O. كما يتقاطع (AB') و $(A'B)$ في نقطة I.

   a. من المثلثات المتحاكية، التي تظهر في الشكل، نتبيّن وجود تحاكيين h_1 و h_2 ينقل كلٌّ منهما $[AB]$ إلى $[A'B']$. تعرَّفْ هذين التحاكيين.

   b. السؤال هو تبيان إذا كان هناك غيرهما. لنفترض وجود تحاكٍ h ينقل $[AB]$ إلى $[A'B']$. علِّل لماذا ينبغي أن تكون $h(A)$ هي A' أو B'، ثُمّ أثبت أنَّ $h = h_1$ أو $h = h_2$.

3. حلّ المسألة عندما $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ و $A \neq A'$.

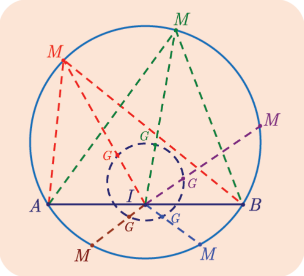
② تطبيق : من خواص شبه المنحرف

$ABB'A'$ شبه منحرف قاعدتاه $[AB]$ و $[A'B']$، يتقاطع (AA') و (BB') في O، ويتقاطع (AB') و $(A'B)$ في I. نرمز إلى منتصفي $[AB]$ و $[A'B']$ بالترتيب بالرمزين E و F. بالاستفادة من إحدى خواصّ التحاكي، أثبت أنَّ النقاط O و E و I و F تقع على استقامة واحدة.

نشاط 2 محلات هندسيّة بالاستفادة من التحاكي

A و B نقطتان من دائرة $\mathcal{C}$ مركزها O، M نقطةٌ ترسم $\mathcal{C}$ عدا النقطتين A و B. النقطة I هي منتصف $[AB]$، والنقطة G هي مركز ثقل المثلث MAB. الغاية من هذا التمرين هي إيجاد المحلّ الهندسي $\mathcal{L}$ للنقطة G عندما ترسم M الدائرة $\mathcal{C}$ عدا A و B.

① تخمين المحلّ الهندسي



الدائرة $\mathcal{C}$ والنقاط A و B و I هي عناصر ثابتة من الشكل. لتخمين $\mathcal{L}$، يمكن أن نختار عدداً من النقاط M ثُمّ ننشئ النقاط G الموافقة. فنحصل على نقاط تبدو وكأنّها على دائرة أو على جزء من دائرة.

② إثبات صحّة التخمين

لنبحث عن علاقات بين G و M والنقاط الثابتة. النقاط M و G و I نقاط واقعة على استقامة واحدة، وهذا يجعلنا نفكّر باستعمال تحاكٍ.

1. أثبت أنَّ G هي صورة M وفق تحاكٍ h مركزه I يطلب حساب نسبة هذا التحاكي.

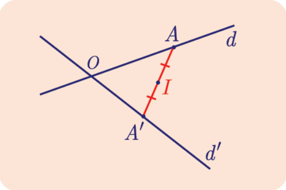
2. إيجاد $\mathcal{L}$، المحلّ الهندسي للنقطة G، هو إذن إيجاد صورة الدائرة $\mathcal{C}$، عدا A و B، وفق h. ولمّا كانت صورة الدائرة $\mathcal{C}$ وفق h هي دائرة $\mathcal{C}'$، كانت $\mathcal{L}$ هي الدائرة $\mathcal{C}'$ محذوفٌ منها صورتا النقطتين A و B. أوجد $h(O)$ ثمَّ ارسم $\mathcal{L}$.

نشاط 3 مسائل إنشاء

① الشرح بمثال

d و d' مستقيمان متقاطعان. النقطة I نقطة لا تقع على أيٍّ من هذين المستقيمين. نريد إنشاء نقطة A على d ونقطة A' على d' شرط أن تقع I في منتصف $[AA']$.

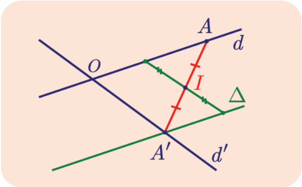
1. المرحلة الأولى : تحليل المسألة



لنفترض أنّ الإنشاء منجزٌ، ولندرس الشكل التقريبّي بحثاً عن توضُّع النقاط المفيدة في هذا الرسم. عموماً، نحاول إثبات وقوع هذه النقاط عند تقاطع خطّين معلومين.

فمثلاً، تقع النقطة A' على المستقيم المعطى d'، فهل يمكننا إيجاد خطٍّ آخر تقع عليه النقطة A'؟ في الحقيقة، إنّ A' هي صورة A وفق التحاكي $h(I,-1)$ أي التناظر المركزي الذي مركزه I. والنقطة A تقع على المستقيم d، إذن، تقع A' على المستقيم Δ الذي هو صورة المستقيم d وفق h.

2. المرحلة الثانية : تركيب الحلّ



نبيّن في هذا الجزء طريقةً لإنشاء الشكل المطلوب، مبرّرين صحّة هذا الإنشاء.

a. نرسم المستقيم Δ صورة المستقيم d وفق h. فيتقاطع Δ مع d' في A'. علّل تقاطع هذين المستقيمين.

b. يتقاطع المستقيم $(A'I)$ مع d في النقطة A. فتكون I منتصف $[AA']$. لماذا؟

② الاستفادة من انسحاب

$\mathcal{C}$ دائرة مركزها O، و A نقطة من هذه الدائرة، و B هي نقطة تُحقّق $\overrightarrow{OB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA}$. نرمز بالرمز d إلى المستقيم المارّ بالنقطة B عمودياً على (OA). أنشئ على d نقطة M، وعلى $\mathcal{C}$ نقطة N تجعلان من الرباعي $OAMN$ متوازي أضلاع.

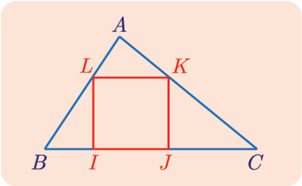
مساعدة : N هي صورة M وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AO}}$.

③ الاستفادة من تحاكٍ

ABC مثلّثٌ حادّ الزوايا. نريد إنشاء مربّع $IJKL$ داخل المثلّث ABC، على أن تقع النقطتان I و J على $[BC]$، و K على الضلع $[AC]$ و L على الضلع $[AB]$.

1. تحليل المسألة

بافتراض الإنشاء مُنجزاً، نرى مثلّثين متحاكيين، مما يوحى بالاستفادة من تحاكٍ. نرمز بالرمز h إلى التحاكي الذي مركزه A وينقل L إلى B.



a. عيّن $h(K)$ و $h(I)$ و $h(J)$.

b. عيّن المربّع $BEDC$ صورة $IJKL$ وفق h.

2. تركيب الحل

نعود إلى المثلّث ABC.

a. أنشئ المربّع $BEDC$، متذكّراً أنّ A و D تقعان في جهتين مختلفتين من (BC).

b. المستقيم (AE) يقطع (BC) في I، والمستقيم (AD) يقطع (BC) في J، والعمود على (BC) في I يقطع (AB) في L، والعمود على (BC) في J يقطع (AC) في K. أثبت أنّ $IJKL$ مربّع.

تمرينات ومسائل

1 d مستقيمٌ معادلته $2x-y+3=0$ في معلمٍ $(O;\vec{i},\vec{j})$. يقطعُ d محور التراتيب في A.

نرمز إلى التحاكي الذي مركزه O ونسبته -2 بالرمز h.

1. اكتب إحداثيّتي النقطة $A'=h(A)$.
2. استنتج معادلةً للمستقيم d' صورة d وفق h.

2 في معلمٍ $(O;\vec{i},\vec{j})$. نتأمل مستقيمين d و d' مستقيمان معادلتاهما بالترتيب $x-y+3=0$ و $x-y-2=0$. يقطع المستقيمان d و d' محور التراتيب في A و B بالترتيب.

1. تحقّق أنَّ d و d' متوازيان واحسب إحداثيات A و B.
2. ليكن h التحاكي الذي مركزه O ويحقّق $h(A)=B$.
   - a. لماذا d' هو صورة d وفق h؟
   - b. ما نسبة هذا التحاكي؟

3 نتأمّل، في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، الدائرتين $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ اللتين معادلتاهما بالترتيب

$x^2+y^2=4$ و $x^2+y^2-6x+8=0$.

1. ارسم الدائرتين $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ وتحقّق أنهما متماستان.
2. أثبت أنَّ $\mathcal{C}'$ هي صورة $\mathcal{C}$ وفق تحاكٍ h مركزه $I(2,0)$. ما نسبة هذا التحاكي؟

4 $\mathcal{C}$ دائرة معادلتها $x^2+y^2-6x-2y+6=0$. عيّن، في كلٍّ من الحالات الآتية، معادلةً للدائرة $\mathcal{C}'$، صورة $\mathcal{C}$ وفق التحويل T.

① T هو الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}$.

② T هو التناظر الذي مركزه O.

③ T هو التحاكي الذي مركزه O ونسبته -2.

④ T هو التناظر بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته $y=-1$.

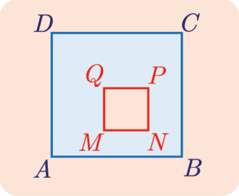
5 في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ دائرتان، معادلتاهما بالترتيب

$x^2+y^2-6x+8y=0$ و $x^2+y^2-12x-6y+41=0$

احسب إحداثيّات مراكز التحاكيات الذي ينقل كلٌّ منها $\mathcal{C}$ إلى $\mathcal{C}'$.

لنتعلّم البحث معاً

6 إثبات تلاقي مستقيمات في نقطة واحدة



$ABCD$ و $MNPQ$ مربّعان أضلاعهما متوازية مثنى مثنى. أثبت أنَّ المستقيمات (AM) و (BN) و (CP) و (DQ) تتلاقى في نقطة واحدة.

نحو الحلّ

لنتأمّل الشكل. «المربّع الصغير» تصغيرٌ للمربّع الكبير، يمكننا إذن التفكير بأنهما متحاكيان. نريد إثبات تلاقي أربعة مستقيمات. أحد مداخل البرهان هو إثبات أنَّ اثنين من هذه المستقيمات يمران بنقطة تقاطع الاثنين الآخرين.

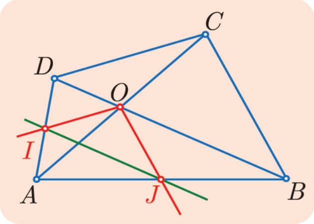
ارسمْ، على سبيل المثال، (DQ) و (AM) ولتكن O نقطة تقاطعهما.

يحثنا تحاكي المثلثين OAD و OMQ، بالإضافة إلى ما توصلنا إليه أعلاه، على الاستفادة من التحاكي h الذي مركزه O وينقل النقطة A إلى M. لإثبات أنَّ (CP) يمرُّ بالنقطة O، يكفي التيقُّن من أنَّ $h(C) = P$.

1. لماذا تقع $h(C) = C'$ على المستقيم المارّ بالنقطة Q موازياً (CD)؟
2. لماذا تقع C' على (OC)؟ أكمل.
3. أثبت أنَّ النقاط O و N و B تقع على استقامة واحدة.

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

7 إثبات توازي مستقيمين



$ABCD$ رباعي محدّب، قطراه $[AC]$ و $[BD]$ متقاطعان في O. المستقيم المرسوم من O موازياً (DC) يقطع $[DA]$ في I، المستقيم المرسوم من O موازياً (BC) يقطع (AB) في J. أثبت أنَّ المستقيمين (IJ) و (BD) متوازيان.

نحو الحلّ

لنحلّلْ الشكل كي نستنبط النتائج. استناداً إلى الفرْض، (OI) يوازي (CD) و (OJ) يوازي (CB). فإذا تفحصنا الشكل، تبيّنا مثلّثاتٍ متحاكيةً مشتركة بالرأس A، تحثنا على استعمال تحاكٍ مركزه النقطة A.

1. دلّ على زوجين من المثلّثات المتحاكية.
2. احسب نسبة التحاكي في كلٍّ من حالتي التحاكي.

يتعلّق الأمر بإثبات توازي مستقيمين. فإنْ استعملنا تحاكياً h، كان إحدى طرائق الحلّ هو إثبات أنَّ أحد المستقيمين هو صورة الآخر وفق h.

1. بالاستفادة مثلاً من التحاكي h الذي مركزه A وينقل O إلى C، أثبت أنَّ صورة المستقيم (DB) هي المستقيم (IJ) .

2. أنجز هذا الإثبات.

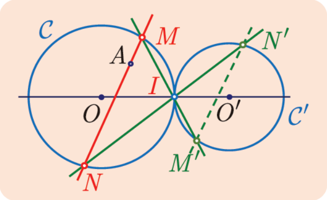
أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

8 مستقيم متحوّل يمرّ بنقطة ثابتة

$\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ دائرتان متماستان خارجاً في I، مركزاهما O و O' ونصفا قطريهما r و r'، مع $r \neq r'$. ليكن d مستقيماً مارّاً بنقطةٍ معطاة A، وقاطعاً الدائرة $\mathcal{C}$ في M و N. يقطعُ المستقيمُ (MI) الدائرة $\mathcal{C}'$ في M'، و يقطعها المستقيم (NI) في N'. أثبت أنَّ المستقيم $(M'N')$ يمرُّ بنقطةٍ ثابتة عندما يدور المستقيم d حول A.

نحو الحلّ

لنتأمّل الشكل كي نستنبط بعض النتائج، ونخمّن موضع النقطة الثابتة. يبدو أنَّ المثلّثين IMN و $IM'N'$ متحاكيان. أيَكون المستقيم $(M'N')$ صورة (MN) وفق تحاكٍ h مركزه I؟ لنقبل بوجود مثل هذا التحاكي ولنرَ ما يترتَّب على ذلك من نتائج.



يتعلّق موضع النقطة الثابتة بموضع النقطة A، ولمّا كانت A تقع على (MN)، وقعت صورتها $A' = h(A)$ على $(M'N')$. فمن المعقول التفكير بأنَّ A' هي النقطة المنشودة. يبقى إذن إيجاد التحاكي h الذي مركزه I وينقل (MN) إلى $(M'N')$. ولكن تقع النقطتان M و N على الدائرة $\mathcal{C}$، وتقع صورتاهما M' و N' على الدائرة $\mathcal{C}'$، نفكِّرُ إذن بالتحاكي الذي مركزه I وينقل $\mathcal{C}$ إلى $\mathcal{C}'$.

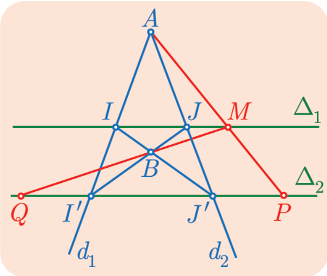
1. احسب نسبة التحاكي h ولاحظ أنَّها لاتتعلّق بالمستقيم d.

2. عيِّن $h(M)$ و $h(N)$.

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

9 مساواة شعاعيّة

في الشكل المجاور Δ_1 و Δ_2 مستقيمان متوازيان، M نقطة ما من Δ_1، المستقيم (AM) يقطع Δ_2 في P والمستقيم (BM) يقطع Δ_2 في Q. أثبت أنَّ $\overrightarrow{I'Q} = -\overrightarrow{J'P}$.



نحو الحلّ

- يبيّن الشكل خمسة أزواج من المثلّثات المتحاكية، بعضها بالنسبة إلى الرأس A وبعضها الآخر بالنسبة إلى الرأس B. عيّن أزواج المثلّثات المتحاكية الظاهرة في الشكل.
- يبدو من الصعب إثبات الخاصّة المطلوبة مباشرة، نفكّر إذن بالتعبير عن هذين الشعاعين بدلالة شعاع ثالث، خاصّة وأنّ الملاحظة السابقة تبيّن أنّ الشعاع $\overrightarrow{J'P}$ هو صورة الشعاع $\overrightarrow{JM}$ وفق تحاك مركزه A، و $\overrightarrow{I'Q}$ هو صورة الشعاع $\overrightarrow{JM}$ وفق تحاك مركزه B. إذن

1. ليكن h_1 التحاكي الذي مركزه A وينقل J إلى J'، ونسبته k_1. أثبت أنّ $\overrightarrow{J'P} = k_1\overrightarrow{JM}$.
2. ليكن h_2 التحاكي الذي مركزه B وينقل J إلى I'، ونسبته k_2. أثبت أنّ $\overrightarrow{I'Q} = k_2\overrightarrow{JM}$.

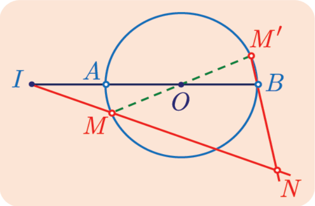
- لإنجاز المطلوب يكفي إذن إثبات أنّ $k_1 = -k_2$. وليس هذا صعباً إذا تذكّرنا أننا لم نستعمل بعدُ جميع الفرضيّات، وبوجه خاصّ كون AIJ و $AI'J'$ متحاكيين، وكذلك الأمر بالنسبة إلى BIJ و $BI'J'$.

1. أثبت أنّ $\overrightarrow{I'J'} = k_1\overrightarrow{IJ}$.
2. أثبت أنّ $\overrightarrow{I'J'} = -k_2\overrightarrow{IJ}$.

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

10 البحث عن محلٍّ هندسي

$\mathcal{C}$ دائرةٌ مركزها O، و $[AB]$ أحدُ أقطارها. I هي نقطة تحقّق $\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AO}$. M نقطةٌ من $\mathcal{C}$ مختلفة عن A و B، و M' هي النقطة المقابلة قطرياً للنقطة M، وأخيراً N هي نقطة تقاطع المستقيمين (IM) و (BM'). عيّن المحلّ الهندسي للنقطة N عندما ترسم M الدائرة $\mathcal{C}$ عدا النقطتين A و B.



نحو الحلّ

- علينا بدايةً الاهتمام بالنقاط الثابتة والنقاط المتحرّكة.
  - النقاط I و A و O و B نقاط ثابتة.
  - النقاط M و M' و N نقاط متحركة، ترسمُ M الدائرة $\mathcal{C}$ عدا A و B، إذن كذلك الأمر بالنسبة إلى النقطة M'، وتتعلّق مواضع النقطة N بمواضع M.

لنبحث، في الشكل، عن الروابط بين النقطتين M و N من جهة والنقاط الثابتة من جهة أخرى.

1. $[AB]$ و $[MM']$ قطران في الدائرة $\mathcal{C}$، ماذا تستنتج بشأن الشكل الرّباعي $AMBM'$؟ استنتج من ذلك أنَّ (AM) و (BN) متوازيان.
2. المثلّثان IAM و IBN متحاكيان. استنتج أنَّ N هي صورة M وفق تحاكٍ h يُطلب معرفة مركزه ونسبته. لاحظ أنّهما لا يتبعان موقع M على $\mathcal{C}$.

وهكذا فإنَّ كلَّ نقطة N مقرونة بنقطة M هي صورتها وفق تحاكٍ ثابت. المحلّ الهندسّي للنقطة N هي، كما نعلم من تعريفه، مجموعة جميع النقاط N المرتبطة بجميع النقاط M من الدائرة $\mathcal{C}$ عدا النقطتين A و B. فهي إذن صورة $\mathcal{C}$ عدا A و B وفق التحاكي h.

عيِّن هذه الصورة.

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

11 مسألة وجود

نتأمّل، في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، الدائرتين $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$، اللّتين معادلتاهما بالترتيب :

$x^2+y^2-14x+2y+41=0$ و $x^2+y^2-8x-4y+16=0$

المطلوب هو تبيان وجود تحاكيات تنقل $\mathcal{C}$ إلى $\mathcal{C}'$. وتعيينها في حال وجودها.

نحو الحلّ

لنفترض وجود تحاكٍ h، ينقل $\mathcal{C}$ إلى $\mathcal{C}'$ فماذا نستنتج ؟ إذا رمزنا بالرمزين A و A' إلى مركزي $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ على التوالي. وبالرمزين r و r' إلى نصفي قطريهما كان $h(A)=A'$ و $r'=|k|r$.

1. احسب إحداثيّات A و A' واحسب r و r'.
2. ارسم $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.
3. استنتج أنَّ $|k|=\frac{3}{2}$ ومن ثَمَّ وجود قيمتين ممكنتين للعدد k هما $k_1=\frac{3}{2}$ و $k_2=-\frac{3}{2}$.

يوجد إذن تحاكيان ممكنان. ليكن h_1 ذلك الذي نسبته k_1 ومركزه النقطة I_1، و h_2 ذلك الذي نسبته k_2 ومركزه النقطة I_2.

1. أثبت أنَّ I_1 هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,-3)$ و $(B,2)$، وأنَّ I_2 هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,3)$ و $(B,2)$.
2. أنشئ على الشكل النقطتين I_1 و I_2.

إذن لقد أثبتنا أنّ أي تحاك h ينقل $\mathcal{C}$ إلى $\mathcal{C}'$ هو واحدٌ من بين التحاكيين h_1 و h_2. ولكن لم نثبت بعدُ أنّ هذين التحاكيين يجيبان فعلاً عن هذه المسألة.

أثبت أنَّ صورة $\mathcal{C}$ وفق h_1 أو h_2 هي الدائرة $\mathcal{C}'$.

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

12 $ABCD$ رباعي محدَّب، O هي نقطة تقاطع قطريه $[AC]$ و $[BD]$. المستقيم المرسوم من A موازياً (BC) يقطع (BD) في E، والمستقيم المرسوم من B موازياً (AD) يقطع (AC) في F.

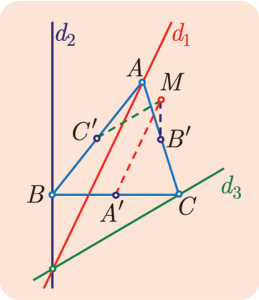
1. ليكن h_1 التحاكي الذي مركزه O ونسبته k_1 ويحقّق $h_1(A) = F$. أثبت أنَّ $h_1(D) = B$، واستنتج أنَّ $\overrightarrow{OF} = k_1\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB} = k_1\overrightarrow{OD}$.
2. ليكن h_2 التحاكي الذي مركزه O ونسبته k_2 ويحقّق $h_2(C) = A$. أثبت أنَّ $h_2(B) = E$ واستنتج أنَّ $\overrightarrow{OE} = k_2\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OA} = k_2\overrightarrow{OC}$.
3. a. استنتج من الأسئلة السابقة أنَّ $\overrightarrow{OE} = k_1k_2\overrightarrow{OD}$ و $\overrightarrow{OF} = k_1k_2\overrightarrow{OC}$.
   b. أثبت أنَّ المستقيمين (DC) و (EF) متوازيان.

13 $ABCD$ شبه منحرف، و O نقطة تقاطع قطريه. و M نقطة « خارج » شبه المنحرف. المستقيم المرسوم من C موازياً (AM) يقطع المستقيم المرسوم من D موازياً (BM) في N. ليكن h التحاكي الذي مركزه O ويحقق $h(A) = C$. أثبت، مستفيداً من التحاكي h، أنَّ النقاط O و M و N تقع على استقامة واحدة.

14 $[OO']$ قطعة مستقيمة طولها 6، و I نقطة منها تحقّق $OI = 4$. لتكن C و C' الدائرتين اللتين مركزاهما بالترتيب O و O' والمارتين بالنقطة I. يمرُّ مستقيمٌ d، مختلفٌ عن (OO')، بالنقطة I ويقطع C و C' في M و N على التوالي.

1. a. ما صورة C وفق التحاكي h الذي مركزه I ونسبته $-\frac{1}{2}$؟
   b. أثبت أنَّ المستقيمين (OM) و $(O'N)$ متوازيان.
2. لتكن N' النقطة المقابلة قطريّاً للنقطة N على الدائرة C'، و A نقطة تقاطع (MN') و (OO').
   a. احسب العدد k الذي يحقّق $\overrightarrow{AO} = k\overrightarrow{AO'}$.
   b. استنتج أنَّ النقطة A ثابتةٌ عندما يتحوّل المستقيم d حول I.
   c. تحقّق أنَّ A هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(O,-1)$ و $(O',2)$.

15 A و B نقطتان، نرمز بالرمز f إلى التحويل الذي يقرنُ بكل نقطةٍ M من المستوي، نقطةً M' تحقّق $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$، وليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$ و $(B,1)$. ارسمْ النقطة G وأثبت أنَّ $\overrightarrow{GM'} = -2\overrightarrow{GM}$. ثُمَّ استنتج طبيعة التحويل f.



16 ABC مثلّث، النقاط A' و B' و C' هي على التوالي منتصفات $[BC]$ و $[CA]$ و $[AB]$. M نقطة في المستوي (ABC)، و d_1 هو المستقيم المارّ بالنقطة A موازياً (MA')، و d_2 هو المستقيم المارّ بالنقطة B موازياً (MB')، و d_3 هو المستقيم المار بالنقطة C موازياً (MC'). نضع G مركز ثقل المثلّث ABC، و h التحاكي الذي مركزه G ونسبته -2.

1. a. لماذا d_1 هي صورة (MA') وفق h؟
   b. ما صورة كلٍّ من (MB') و (MC') وفق h؟
2. استنتج أنَّ المستقيمات d_1 و d_2 و d_3 تتلاقى في نقطة واحدة وأنَّ النقاط G و M و M' تقع على استقامة واحدة.
3. **مستقيم أويلر**. ليكن O مركز الدائرة المارّة برؤوس المثلّث ABC، ولنأخذ النقطة M في O.
   a. أثبت أنَّ صورة (OA') وفق h هي الارتفاع المرسوم من A في المثلّث ABC.
   b. استنتج أنّه إذا انطبقت M على O انطبقت M' على النقطة H أي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلّث ABC.
   c. استنتج أنَّ النقاط O و H و G واقعة على مستقيم واحد، يسمى **مستقيم أويلر**.

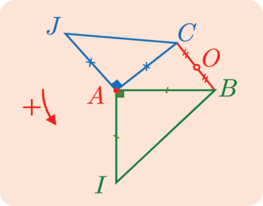
17 ليكن h التحاكي الذي مركزه $I(2,-1)$ ونسبته $k=-\frac{3}{2}$.

1. $\mathcal{C}$ هي الدائرة التي مركزها O والمارة بالنقطة I. ارسم الدائرة $\mathcal{C}'$، صورة $\mathcal{C}$ وفق h، واكتب معادلةً لها.
2. d هو المستقيم الذي معادلته $x-3y+5=0$. ارسم المستقيم d'، صورة d وفق h، ومعادلة معادلةً له.

18 ABC مثلّث، و k عددٌ حقيقي من $]0,1[$، M هي النقطة التي تحقق $\overrightarrow{AM}=k\,\overrightarrow{AB}$. المستقيم المرسوم من M موازياً (AC) يقطع (BC) في N والمستقيم المرسوم من N موازياً (AB) يقطع (AC) في P. ليكن h_1 التحاكي الذي مركزه B ويحقّق $h_1(A)=M$ و h_2 التحاكي الذي مركزه C ويحقّق $h_2(B)=N$.

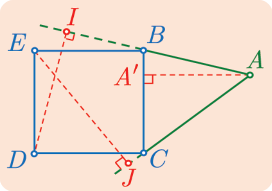
1. احسب بدلالة k نسبة كلٍّ من التحاكيين h_1 و h_2.
2. استنتج أنَّ مساحة المثلّث NPC تساوي جداء ضرب العدد $(\frac{k}{1-k})^2$ بمساحة المثلّث BMN.

19 نتأمّل في المستوي الموجّه الشكل المجاور. ليكن h التحاكي الذي مركزه B ونسبته 2. وليكن r الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$.



1. وضّع على الشكل النقطة $D = h(A)$.
2. استفدْ من الدوران r لإثبات أنَّ $CD = IJ$ وأنَّ (CD) و (IJ) متعامدان.
3. استنتج أنَّ $IJ = 2AO$ وأنَّ المستقيمين (OA) و (IJ) متعامدان.

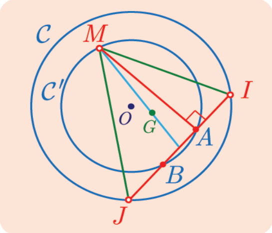
20 نتأمّل في المستوي الموجّه الشكل المجاور الذي فيه $BCDE$ مربّع. ليكن t الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{DC}$. بالاستفادة من t أثبت أنَّ المستقيمات (AA') و (DI) و (EJ) تتلاقى في نقطة واحدة.



21 A و B نقطتان من دائرة $\mathcal{C}$ مركزها O. و M نقطةٌ من $\mathcal{C}$ مختلفة عن كلٍّ من A و B.
ليكن G مركز ثقل المثلّث AMB، و I منتصف $[AM]$.

1. ما هو المحلّ الهندسيّ للنقطة I عندما ترسم M الدائرة $\mathcal{C}$ ما عدا A و B.
2. ما هو المحلّ الهندسيّ للنقطة G عندما ترسم M الدائرة $\mathcal{C}$ ما عدا A و B.

22 $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ دائرتان متمركزتان في النقطة O، نصفا قطريهما 4 و 3 بالترتيب. A نقطة ثابتة من $\mathcal{C}'$ و M نقطة متحوّلة منها مختلفة عن A. المستقيم المارّ بالنقطة A عمودياً على (AM) يقطع الدائرة $\mathcal{C}$ في النقطتين I و J. وليكن G مركز ثقل المثلّث IMJ.



1. ما هي العناصر المتحرّكة في الشكل؟
2. a. أثبت أنَّ القطعتين $[AB]$ و $[IJ]$ متناصفتان.
   b. استنتج أنَّ النقطة G ثابتة عندما ترسم M الدائرة $\mathcal{C}'$ وأنَّ $2\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GA} = 0$.
3. a. ما المحلّ الهندسيّ لمنتصف القطعة $[IJ]$ عندما ترسمُ M الدائرة $\mathcal{C}'$ محذوفاً منها A؟
   b. ليكن K منتصف القطعة $[MI]$، و L منتصف القطعة $[MJ]$، و H منتصف القطعة $[OA]$. أثبت أنَّ المحلّ الهندسيّ للنقطة L هو الدائرة التي مركزها H ونصفُ قطرها 2.
   c. عيّن المحلّ الهندسيّ للنقطة K.

23 d و d' مستقيمان متقاطعان في O، A نقطة ثابتة في المستوي (O,d,d')، لا تنتمي إلى أي من المستقيمين d و d'. أنشئ دائرة مارّة بالنقطة A على أنْ تمس d و d'. كم حلّاً تجد لهذه المسألة؟

6

الاحتمالات

1 عناصر الاحتمال

2 مبرهنات في الاحتمال

3 الاحتمالات المشروطة

4 الاستقلال الاحتماليّ

بدأ الاهتمام بالظواهر العشوائيّة منذ حوالي أربعة قرون، عندما كتب باسكال إلى فيرما يسأله عن رأيه في مسائل تتعلّق بألعاب المصادفة: في لعبة رمي حجر النرد ثماني مرات أراد أحد الحضور أن يجرب حظّه، وبعد أن رمى النرد ثلاث مرات وكانت نتائجها كلها خاسرة انسحب اللّاعب من اللعبة. فبكم يجب أن يغرَّم هذا اللّاعب؟ كانت نتيجة هذه المراسلات بزوغ فرع رياضّياتي جديد مهم هو نظريّة الاحتمالات. كان كاردان قد درس موضوع الاحتمالات قبل قرن من مراسلات باسكال وفيرما. ولكن عمله أُهمل، ونشر هويغنز في عام 1657 كراساً صغيراً يحمل اسم (حول التفكير في ألعاب النرد) وكان دافعه هو المراسلات التي أشرنا إليها. أصبحت نظرية الاحتمالات، بدءاً من عام 1933 على يد كَلْموغوروف، نظريّة رياضيّاتية أعطت نتائج مؤكّدة عن تلك الظواهر العشوائيّة.

فعند إلقاء قطعة نقود يظهر لنا أحد وجهيها، ولكن لا يمكننا معرفة النتيجة قبل إلقاء القطعة كذلك عندما نلقي نرداً فهناك ستّ نتائج ممكنة ولا يمكننا تحديد النتيجة استباقاً. هاتان اللّعبتان مثالان عن التجارب العشوائيّة.

أتُراهن أنّ في صفّك طالبين على الأقلّ مولودان في اليوم نفسه من العام؟ لو فعلتَ ذلك فإنّك قد تربح باحتمالٍ معقول. النظريّة تثبتُ والتجربة تؤكّد أنّه في صفّ مكوّن من 30 طالباً هناك طالبان على الأقلّ مولودان في اليوم نفسه من العام باحتمال 71% وأنّ هذا الاحتمال يصبح 97% إذا ارتفع عدد الطلاّب إلى 50.

في لعبة إلقاء قطعة النقود، لو ألقينا القطعة 10 مرّات فإنّ احتمال الحصول على T عشر مرّات صغير جداً (أقلّ من 0.1%). ومع ذلك تثبتُ النظريّة والتجربة تؤكّد أنّه لو أجرينا التجربة السابقة 4000 مرّة فإنّ احتمال ظهور هذه النتيجة في إحدى المرّات على الأقلّ هو 98%.

6

الاحتمالات

انطلاقة نشطة

① لماذا تُعتبر نظريّة الاحتمالات فعّالة؟

سيوضّح لنا ذلك المثال الآتي: لنفترض أنّنا ألقينا قطعة نقود متوازنة n مرّة. لنرمز بالرمز S_n إلى عدد مرّات ظهور الوجه T وبالرمز f_n إلى التكرار النسبي للوجه T، أي $f_n = \frac{S_n}{n}$. مقابل كلّ قيمة للعدد n سنحصل على قيمة للعدد f_n. تؤكّد مبرهنةٌ في الاحتمالات أنّ f_n يقترب من 0.5 عندما تكبر n كِبراً لا متناهياً. بدقّة أكبر: إنّ احتمال عدم الحصول على نتيجة كهذه معدومٌ. تسمّى هذه المبرهنة **قانون الأعداد الكبيرة**. إذا أجرينا هذه التجربة فعلاً فإنّنا سنحصل على هذه النتيجة، فالتجربة تؤكّد النظريّة أو إنّ النظريّة تتّفق مع الواقع. صحيحٌ أنّ مثالاً واحداً لا يكفي لإثبات فعالّية النظريّة وأهمّيتها ولكن أمثلة وحالات أخرى كثيرة أثبتت ذلك.

② دراسة تجربة عشوائيّة

1. يجب أوّلاً تعيين كلّ النتائج الممكنة للتجربة.
2. علينا، بعد ذلك، ربط كلّ نتيجة ممكنة بعدد محصور بين الصفر والواحد يعبّر عن حظّها في الحدوث. هذا العدد هو احتمال حدوث هذه النتيجة. مجموع كلّ الاحتمالات يساوي الواحد.

هناك في الحقيقة حالتان:

الحالة الأولى: وهي عندما يكون بالإمكان حساب احتمال حدوث كلِّ نتيجة ممكنة حساباً سابقاً، وذلك بأسلوب دقيق وبالاعتماد على شروط التجربة. فمثلاً، في تجربة إلقاء النرد الذي نفترضه مثاليّاً، احتمال ظهور أيّ وجه من الوجوه الستّة هو $\frac{1}{6}$. بالإضافة إلى ذلك فإنّنا نفترض أن النرد بلا ذاكرة أي إنّ نتيجة تجربة ما لا تتعلّق بنتائج التجارب التي سبقتها. نقول في هذه الحالة إنّ التجارب مستقلّة.

الحالة الثانية: وهي عندما لا نستطيع حساب احتمال حدوث بعض النتائج الممكنة للتجربة أو كلّها. فلا يمكننا، مثلاً، توقّع نتيجة انتخابات قبل حدوثها أو توقّع نسب الزمر الدمويّة لدى السكّان في بلدٍ ما. في هذه الحالة نعمد إلى إجراء استبانات على مجموعة (عيّنة) منتقاة جيّداً من المقترعين في الانتخابات أو إلى إجراء تحاليل لزمر دم مجموعة (عيّنة) منتقاة أيضاً من الأشخاص. فقانون الأعداد الكبيرة سالف الذكر يؤكّد لنا أنّه إذا كان عدد عناصر المجموعة كبيراً بقدر كافٍ كانت النتائج التي نحصل عليها قريبة من النتائج النظريّة باحتمال كبير. فاحتمال أن تكون نتائج الاستبانة بعيدة عن نتائج الانتخابات ضئيلٌ جداً.

1 عناصر الاحتمال

في هذه الفقرة نتذكّر معاً ما درسناه في الصفّ الأوّل الثانوي.

1.1. التجربة العشوائيّة، الأحداث البسيطة، فضاء العيّنة

تعريف 1

لنتأمّل **تجربة عشوائيّة** تعطي إحدى النتائج a_1 أو a_2 أو ... أو a_n وإحداها فقط، فتكون المجموعة [*] $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ **فضاء العيّنة** الموافق لهذه التجربة. نسمّي كل مجموعة جزئية من Ω **حدثاً**. ونسمّي كلّ مجموعة جزئية مكوّنة من عنصر واحد (مثل $\{a_1\}$) **حدثاً بسيطاً**. وكذلك نسمي الحدث المؤلَّف من جميع النتائج الممكنة للتجربة أي $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ **الحدث الأكيد**. وأخيراً نسمّي **الحدثَ المستحيل** الحدث الذي لا يحتوي على أيّة نتيجة ويقابله المجموعة الخالية : $\{\} = \varnothing$.

2.1. احتمال حدثٍ بسيط، قانون الاحتمال

تعريف 2

لنتأمّل **تجربة عشوائيّة** ولتكن المجموعة $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ فضاء العيِّنَة الموافق لهذه التجربة. يُمكن أن نقرن بكلّ نتيجةٍ (حدث بسيط) من نتائج هذه التجربة عدداً يُمثِّل احتمال الحصول على هذه النتيجة. فنُعرِّفُ بذلك ما يسمى **قانون احتمال** التجربة العشوائيّة.

نرمز عادةً بالرمز p_1 إلى احتمال النتيجة a_1، و p_2 إلى احتمال a_2، ...، و p_n إلى احتمال a_n.

وإذا أردنا أن تكون الرموز أكثر تعبيراً، فإنّنا نكتب

$$\mathbb{P}(a_1) = p_1, \mathbb{P}(a_2) = p_2, \ldots, \mathbb{P}(a_n) = p_n.$$

تنتمي جميع الأعداد $p_1, p_2, \ldots, p_n$ إلى المجال $[0,1]$. ويكون لدينا :

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

مثال

في صندوق ثلاث كرات سوداء اللّون وواحدة بيضاء وكلّها متماثلة المَلْمَس. نسحب عشوائيّاً كرتين على التتالي دون إعادة، ونسجّل زوج الألوان مع أخذ الترتيب في الحسبان. عيّن فضاء العيّنة وقانون الاحتمال لهذه التجربة العشوائيّة.

---

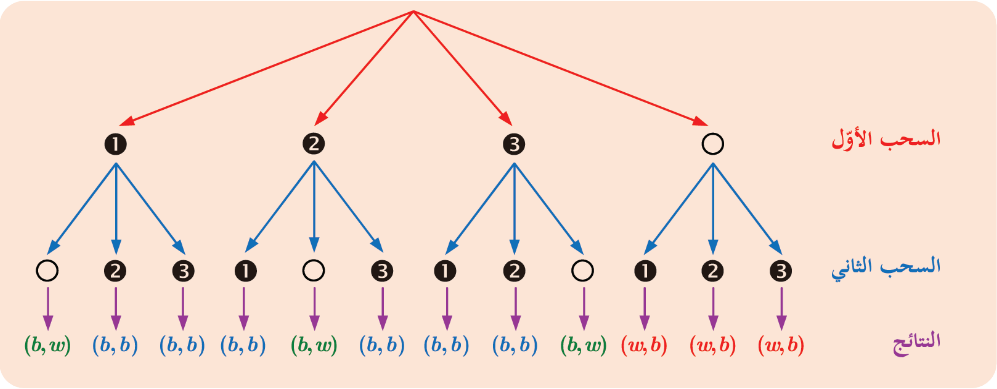
[*] Ω حرفٌ يونانيٌ يُقرأ أومِغا.

الحل

إذا رمزنا إلى الكرة السوداء بالرمز b، وإلى الكرة البيضاء بالرمز w، استطعنا تحديد النتائج الممكنة لهذه التجربة بسهولة فهي (b,b) و (b,w) و (w,b). ومن ثَمَّ يكون فضاء العيّنة لهذه التجربة

$$\Omega = \{(b,b),(b,w),(w,b)\}$$

من الواضح أنّ هذه التجربة غير متساوية الاحتمال لأنّ احتمال (b,b) أكبر من احتمال (b,w). ولكن للاستفادة من الحالات متساوية الاحتمال، نرقّم الكرات السوداء من 1 إلى 3. ونعمد إلى تمثيل التجربة المفترضة بمخطّط شجري كما يأتي:



يمكّننا هذا المخطّط من حساب احتمال كلّ حدث بسيط، حيث نقبل بمبدأ تساوي الفرص بالنسبة إلى كلّ فرع من فروع الشجرة، ونلخّص النتائج على النحو الآتي:

- تظهر النتيجة (b,b) ستّ مرّات، فاحتمال وقوع الحدث البسيط $\{(b,b)\}$ يساوي $\frac{1}{2}=\frac{6}{12}$.
- وتظهر النتيجة (b,w) ثلاث مرّات، فاحتمال وقوع الحدث البسيط $\{(b,w)\}$ يساوي $\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$.
- وتظهر النتيجة (w,b) ثلاث مرّات، فاحتمال وقوع الحدث البسيط $\{(w,b)\}$ يساوي $\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$.

وعليه يمكننا تمثيل قانون احتمال هذه التجربة كما يأتي:

النتيجة	(b,b)	(b,w)	(w,b)
احتمال وقوعها	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

3.1. التجارب العشوائيّة متساوية الاحتمال

تعريف 3

في تجربة عشوائيّة، إذا كان للنتائج الممكنة المختلفة كلّها الاحتمال ذاته، قلنا إنّ التجربة متساوية الاحتمال أو إنّ لها توزيعاً منتظماً. وإذا كان n هو عدد نتائج التجربة كلّها: $n = n(\Omega)$ كان احتمال كلّ نتيجة مساوياً $p = \frac{1}{n}$. ذلك لأنّ مجموع هذه الاحتمالات يجب أن يساوي الواحد.

3.1. احتمال وقوع حدث في الحالة العامّة

خاصّة أساسيّة

في تجربة عشوائيّة، احتمال وقوع حدث (غير الحدث المستحيل) يساوي مجموع احتمالات وقوع كلّ الأحداث البسيطة التي يتألّف منها. أمّا الحدث المستحيل $\varnothing$ فاحتمال وقوعه يساوي 0.

مثال

لنتأمّل في تجربة إلقاء حجرَي نرد متوازنين تماماً ومتماثلين مرقّمين من 1 إلى 6. الحدث **"الحصول على رقمين متساويين أكبر تماماً من 3 أو مجموعهما يساوي 8"**، الموافق للمجموعة الجزئيّة : $A = \{(4\ \&\ 4),(5\ \&\ 5),(6\ \&\ 6),(2\ \&\ 6),(3\ \&\ 5)\}$. إنّ احتمال وقوع هذا الحدث يساوي

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(4\ \&\ 4) + \mathbb{P}(5\ \&\ 5) + \mathbb{P}(6\ \&\ 6) + \mathbb{P}(2\ \&\ 6) + \mathbb{P}(3\ \&\ 5)$$
$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} = \frac{7}{36}$$

نتيجة مُهمّة

في تجربة عشوائيّة متساوية الاحتمال، احتمال وقوع حدثٍ A هو خارج قسمة عدد عناصر الحدث على عدد عناصر فضاء العيّنة Ω أي :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{A\ \text{عدد عناصر}}{\Omega\ \text{عدد عناصر}} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

لأنه إذا كان m عدد عناصر Ω كان احتمال أي حدث بسيط $p = \frac{1}{m}$، وإذا كان k عدد الأحداث البسيطة التي تؤلّف A استنتجنا أنّ

$$\mathbb{P}(A) = \underbrace{\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \cdots + \frac{1}{m}}_{k\ \text{مرّة}} = k \times \frac{1}{m} = \frac{k}{m}$$

تَدرَّبْ

① في تجربة إلقاء حجر نرد مكعّب الشكل وجوهه مرقّمة من 1 إلى 6. نهتمّ برقم الوجه الظاهر في الأعلى.

1. اكتب فضاء العيّنة.
2. عبّر بعبارة نصيّة عن كلّ من الأحداث الآتية :
   - $\{1,2,3\}$
   - $\{1,3,5\}$
   - $\{2,4,6\}$
   - $\{5,6\}$
3. اكتب بصيغة مجموعة جزئيّة من فضاء العيّنة كلّاً من الأحداث الآتية :
   - "الحصول على عدد أوّلي".
   - "الحصول على عدد فردي".
   - "الحصول على عدد يقبل القسمة على 2 أو 3".
   - "الحصول على مربّع كامل".

② في تجربة إلقاء حجر نرد رباعي الوجوه متوازن تماماً مرقّم من 1 إلى 4 مرّتين متتاليتين، نهتمّ بمجموع الرقمين الناتجين.

1. علّل لماذا يكون فضاء العيّنة: $\Omega = \{8,7,6,5,4,3,2\}$؟
2. اكتب قانون الاحتمال مُتمّماً الجدول الآتي:

النتيجة	2	3	4	5	6	7	8
احتمال وقوعها							

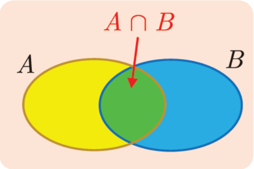
3. احسب احتمال وقوع الحدث $S = \{3,5,7\}$.
4. احسب احتمال وقوع الحدث $T = \{6,7,8\}$.

مبرهنات في الاحتمال 2

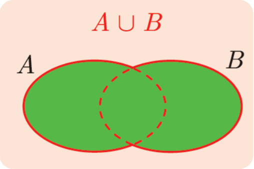
1.2. عمليات على الأحداث

تعريف 4

- لتكن المجموعة المنتهية Ω التي تمثل فضاء العيّنة لتجربة ما. وليكن A و B حدثين أي مجموعتين جزئيّتين من Ω.



- الحدث **«A و B»** هو الحدث الذي يقع عندما يقع الحدثان A و B في آن معاً. وهذا الحدث يوافق المجموعة الجزئيّة $A \cap B$، أي مجموعة نتائج التجربة التي تنتمي إلى كل من المجموعتين A و B.
- وعندما يكون $A \cap B = \varnothing$ نقول إنّ الحدثين A و B **منفصلان**.



- أما الحدث **«A أو B»** فهو الحدث الذي يقع عندما يقع أحد الحدثين A أو B على الأقل. وهذا الحدث يوافق المجموعة الجزئيّة $A \cup B$، أي مجموعة نتائج التجربة التي تنتمي إلى أيٍّ من المجموعتين A أو B أو إلى كليهما.
- الحدث المُعاكس A' هو الحدث الذي يقع عندما لا يقع الحدث A، أي مجموعة نتائج التجربة التي لا تنتمي إلى المجموعة A.
- نقول إنّ الحدثين A و B يؤلّفان تجزئة للحدث الأكيد Ω إذا كانا منفصلين وغير مستحيلين وكان $A \cup B = \Omega$.

مثال

نتأمّل المجموعة $\Omega = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. ليكن A الحدث الموافق للأعداد الزوجيّة في Ω، و B الحدث الموافق للأعداد الفرديّة في Ω و C الحدث الموافق لمضاعفات العدد 4 في Ω.

① اكتب بصيغة القائمة الأحداث الآتية:

$A \cap B$، $A \cup B$، $A \cap C$، $A \cup C$، $B \cup C$، $B \cap C$، A'، $(A \cup B)'$.

② هل يؤلّف الحدثان A و B تجزئةً للمجموعة Ω؟

③ لنرمز إلى عدد عناصر المجموعة A بالرمز $n(A)$. أثبت أنّ

❶ $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

❷ $n(A') = n(\Omega) - n(A)$

الحل

① نكتب أولاً عناصر المجموعات A و B و C

$$A = \{0,2,4,6,8\},\ B = \{1,3,5,7,9\},\ C = \{0,4,8\}$$

بالاستفادة من التعاريف السابقة نجد

$$B \cap C = \varnothing \qquad A \cap B = \varnothing$$
$$B \cup C = \{0,1,3,4,5,7,8,9\} \qquad A \cup B = \Omega = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$
$$A \cap C = \{0,4,8\} \qquad (A \cup B)' = \varnothing$$
$$A \cup C = A = \{0,2,4,6,8\} \qquad A' = B = \{1,3,5,7,9\}$$

② نلاحظ أن $A \cup B = \Omega$ و $A \cap B = \varnothing$، إذن تؤلّف المجموعتان A و B تجزئةً للمجموعة Ω.

③ هذا تحقُّقٌ بسيطٌ نتركه للقارئ.

2.2. خواص احتمالات الأحداث

مُبرهَنة 1

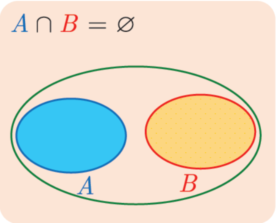
ليكن A و B حدثين في تجربة عشوائيّة عندها:

① إذا كان الحدثان A و B منفصلين $(A \cap B = \varnothing)$ كان $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

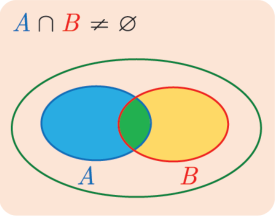
② أمّا في الحالة العامّة فيكون $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

③ $\mathbb{P}(A') = 1 - \mathbb{P}(A)$.

الإثبات



① إنّ $\mathbb{P}(A)$ هو مجموع احتمالات عناصر A، و $\mathbb{P}(B)$ هو مجموع احتمالات عناصر B. كذلك $\mathbb{P}(A \cup B)$ هو مجموع احتمالات عناصر $A \cup B$، ولمّا كان A و B منفصلين وليس ثمّة عناصر مشتركة بينهما، استنتجنا أنّ $\mathbb{P}(A \cup B)$ هو مجموع احتمالات عناصر A مضافاً إليه مجموع احتمالات عناصر B ومنه $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.



② إنّ $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ هو مجموع احتمالات عناصر A مضافاً إليه مجموع احتمالات عناصر B. في هذه الحالة نحسب احتمالات عناصر $A \cap B$ مرّتين: مرّة في المجموع الذي يعطي $\mathbb{P}(A)$ ومرّة في المجموع الذي يعطي $\mathbb{P}(B)$، إذن يجب طرح مجموع احتمالات عناصر $A \cap B$ مرّة واحدة لنحصل على مجموع احتمالات عناصر $A \cup B$. ومنه

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

③ من تعريف A' لدينا $A \cup A' = \Omega$ و $A \cap A' = \varnothing$، إذن

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A') = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

وهذا يُنجز الإثبات.

مثال كيف نستفيد من المبرهنة 1؟

يحوي صندوق $100\,000$ كرة مرقّمة من 1 إلى $100\,000$. نسحب عشوائيّاً كرةً ونسجّل رقمها x.

ما احتمال كلٍّ من الحدثين الآتيين؟

A : « x ليس مضاعفاً للعدد 3».

B : « x ليس مضاعفاً للعدد 3 أو ليس مضاعفاً للعدد 5».

الحل

نختار مجموعةَ الكرات فضاءً للتجربة. إنّ النتائج الممكنة كلّها متساوية الاحتمال لأنّ السحب عشوائيّ افتراضاً.

- يتطلّب حساب $\mathbb{P}(A)$ عدّ الأعداد الطبيعيّة الواقعة بين 1 و $100\,000$ التي ليست من مضاعفات 3. لو تأمّلنا الحدث A' المتمم للحدث A لوجدنا أنّ هذا الحدث هو «x من مضاعفات 3»، وعدُّ المضاعفات أبسط من عدّ غير المضاعفات لهذا الغرض نلاحظ أنّ أوّل مضاعف للعدد 3 في المجموعة هو 3 وآخر مضاعف هو $99\,999$ ومن ثَمّ فإنّ عدد هذه المضاعفات هو $\frac{99\,999}{3} = 33\,333$ إذن $\mathbb{P}(A') = 0.33\,333$ وعليه نجد

$$\mathbb{P}(A) = 1 - 0.33\,333 = 0.66667$$

- الحدث المتمم للحدث B هو B' : «x من مضاعفات 3 و x من مضاعفات 5» أي «x من مضاعفات 15». (نقبل أنّه إذا كان a و b أوّليّين فيما بينهما كان كلّ مضاعف للعددين a و b في آن معاً مضاعفاً للعدد ab.) إنّ عدد هذه المضاعفات هو $6\,666 = \frac{99\,990}{15}$، ومن ثَمّ $\mathbb{P}(B) = 1 - 0.06\,666 = 0.93\,334$.

مثال كيف نستفيد من المبرهنة 1؟

يحوي صندوق 40 كرةً مرقّمة من 10 إلى 49. نسحب عشوائياً كرة ونسجّل العدد الظاهر على هذه الكرة. احسب احتمالات الأحداث الآتية:

A : « آحاد العدد 1»

B : « عشرات العدد زوجيّة»

C : « آحاد العدد يساوي 1 أو عشراته زوجيّة»

D : « آحاد العدد لا يساوي 1 وعشراته فرديّة»

الحل

نختار مجموعة الأعداد الطبيعيّة بين 10 و 49 فضاءً للتجربة. النتائج هنا متساوية الاحتمال لأنّ السحب عشوائي.

- يتكوّن الحدث A من أربعة عناصر هي 11، 21، 31، 41. بذلك يكون

$$\mathbb{P}(A) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$$

- يتكوّن الحدث B من 20 عنصراً، إذن

$$\mathbb{P}(B) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

- C هو الحدث «A أو B» أي $A \cup B$ فيكون $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ يكفي إذن حساب $P(A \cap B)$. إذْ إنّ الحدث $A \cap B$ هو الحدث: «آحاد العدد يساوي 1 وعشراته زوجيّة» أي $A \cap B = \{21, 41\}$ وعليه

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{40} = \frac{1}{20}$$

إذن

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A \cup B) = \frac{1}{10} + \frac{1}{2} - \frac{1}{20} = \frac{11}{20}$$

- D هو الحدث المعاكس للحدث C أي $D = C'$، ومنه $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(C') = 1 - \mathbb{P}(C) = \frac{9}{20}$.

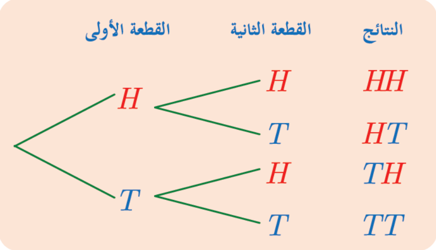
تكريساً للفهم

كيف نعدُّ النتائج الممكنة والنتائج الموافقة لحدث ؟

هناك طريقتان: إنشاء شجرة وملء الخانات.

مثال إلقاء n قطعة نقود مرّةً واحدة

نلقي قطعتيّ نقود مرقّمتين 1 و 2، ونسجّل النتيجة التي نحصل عليها. يمكن أن نعبّر عن الحالة بالشجرة المجاورة التي تعطي النتائج الممكنة: HH و HT و TH و TT.



نفترض أنّ قانون الاحتمال هنا منتظمٌ.

سؤال: ما احتمال الحدث A : «الحصول على T و H » ؟ الجواب هو $\frac{1}{2}$ لأنّ الحدث A يقع عند نتيجتين من النتائج الأربع الممكنة في العمود الأخير، حيث

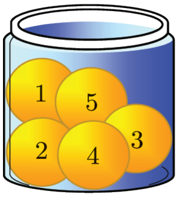
$$\Omega = \{HH, TH, HT, TT\} \text{ و } A = \{TH, HT\}$$

إذا لم تكن القطعتان متمايزتين كانت النتائج: HH و HT و TT. هذه النتائج ليست متساوية الاحتمال واحتمالاتها هي بالترتيب: $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$.

في حالة ثلاث قطع نقود، نمدّد كلّ فرع في الشجرة السابقة بفرعين إضافيين، ونحصل بذلك على ثماني نتائج ممكنة هي:

HHH و HHT و HTH و THH و HTT و THT و TTH و TTT.

مثال سحب كرة مع الإعادة



▫ يحوي صندوقٌ خمسَ كراتٍ مرقّمة من 1 إلى 5. نسحب تباعاً مع الإعادة ثلاث كراتٍ، أي نعيد الكرة التي سحبناها إلى الصندوق في كلّ مرّة. نسجّل، بالترتيب، أرقام الكرات المسحوبة. فنحصل بذلك على قائمة مؤلّفة من ثلاثة أرقام، ليست بالضرورة مختلفة عن بعضها، مأخوذة من المجموعة $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

لعدّ النتائج الممكنة، يمكننا مَلء خانات بدلاً من إنشاء شجرة. نملأ ثلاث خانات مرقّمة 1 و 2 و 3 بأعداد على الوجه الآتي:

خانة 1	خانة 2	خانة 3
5 خيارات	5 خيارات	5 خيارات

هناك 5 خيارات لملء الخانة الأولى، ويتبع كلَّ واحدٍ منها 5 خيارات لملء الخانة الثانية (لأنّنا أعدنا الكرة التي سحبناها إلى الصندوق). ومن ثَمّ هناك 5×5 خياراً ممكناً لمَلء الخانتين 1 و 2. و يلي كلَّ واحدٍ منها 5 خيارات لملء الخانة 3، إذن هناك $5 \times 5 \times 5$ نتيجة ممكنة للتجربة.

▫ باستعمال التقنيّة نفسها يمكننا معالجة تجربة إلقاء حجرَي نردٍ معاً. هناك 36 نتيجة ممكنة.

خانة 1	خانة 2
6 خيارات	6 خيارات

مثال سحب كرة دون إعادة

نُعيد تجربة المثال السابق ولكن دون إعادة الكرة المسحوبة.

خانة 1	خانة 2	خانة 3
5 خيارات	4 خيارات	3 خيارات

هناك 5 خيارات لملء الخانة الأولى، ويتبع كلّ واحدٍ منها 4 خيارات لملء الخانة الثانية (لأنّنا لم نُعِد الكرة المسحوبة إلى الصندوق). إذن هناك 5×4 خياراً لملء الخانتين 1 و 2. ويتبع كلَّ واحدٍ منها 3 خيارات لملء الخانة 3، إذن هناك $5\times4\times3$ نتيجة ممكنة في التجربة. نفترض أنّ هذه النتائج متساوية الاحتمال.

سؤال: ما احتمال وقوع الحدث A : «الكرة الثانية المسحوبة تحمل الرقم 4»؟

نحصل على نتيجة موافقة للحدث A بوضع 4 في الخانة 2. إذن يبقى 4 خيارات لملء الخانة 1، ويوافق كلٌّ منها 3 خيارات لملء الخانة 3. إذن هناك 4×3 نتيجة تُحقّق A، وعليه يكون $\mathbb{P}(A)=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$.

تَدرَّبْ

① لدينا حجر نرد غير مثاليّ، نعلم أنّ احتمالات ظهور الوجوه ⚁، ⚂، ⚃، ⚄ متساوية، وأنّ احتمال ظهور ⚅ هو نصف احتمال ظهور أحد الوجوه السّابقة وأنّ احتمال ظهور ⚀ هو $\frac{1}{2}$.
اكتب علاقات تربط الاحتمالات السّابقة، واستنتج قانون الاحتمالات المعرّف على $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

② نلقي حجر نرد رباعيّ الوجوه منتظم، وجوهه مرقّمة من 1 إلى 4. نسجّل الرقم المخفيّ من النرد. اكتب قانون احتمال هذه التجربة مع العلم أنّ النرد مثاليّ.

③ تحمل وجوه حجر نرد مثالي مكعّب الشكل الأعداد $3,2,2,1,1,1$. نلقيه مرّةً واحدةً. ونتأمّل الأحداث الآتية:

A : « العدد الظاهر هو 1»

B : « العدد الظاهر هو 2»،

C : « العدد الظاهر مختلف عن 3»

احسب احتمالات A و B و C.

3 الاحتمالات المشروطة

1.3 الاحتمال المشروط بوقوع حدث

بوجه عامّ قد يؤثر وقوع حدث B في فرص وقوع حدث آخر A ويغير احتمال وقوعه من قيمته الأصلية $\mathbb{P}(A)$ إلى قيمة جديدة نرمز إليها $\mathbb{P}(A|B)$. نسميها احتمال وقوع A علماً أن الحدث B قد وقع.

تعريف 5.

ليكن B حدثاً يُحقّق $\mathbb{P}(B) \neq 0$، ولنفترض أننّا نعلم أنّه قد وقع، عندئذٍ نُعرِّف الاحتمال المشروط لوقوع حدث A علماً أنّ B قد وقع، (أو احتمال A مشروطاً بالحدث B)، بالصيغة

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

وتكتب هذه المساواة بالصيغة المفيدة أيضاً $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)$.

مثال

نتأمل تجربة إلقاء حجري نرد متوازنين. ما احتمال أن يكون مجموع الوجهين الظاهرين أكبر تماماً من 6 (الحدث A) علماً أن الحجر الأول قد أظهر الوجه 3 (الحدث B)؟

الحل

من الواضح أن الجواب هو $\frac{1}{2}$ لأنّ وقوع الحدث A مشروطاً بوقوع الحدث B يكافئ ظهور أحد الوجوه 4 أو 5 أو 6 من الحجر الثاني. لنتوقف عند هذه النتيجة: يتكون فضاء العيّنة من 36 عنصراً، ولمّا كان حجرا النرد متوازنين كان احتمال وقوع حدث ما A هو $\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{36}$. في حالتنا

$$B = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)(3,5)\}$$

$$A \cap B = \{(3,4),(3,5),(3,6)\}$$

ومنه

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2}.$$

مثال

لدى عائلة طفلان، ما هو احتمال كونهما ذكرين إذا علمت أن أحدهما ذكر؟

الحل

يمكن لأيٍّ من الطفلين أن يكون ذكراً B أو أنثى G. وبناءاً على هذا يمكننا تمثيل فضاء العيّنة على الوجه الآتي $\Omega = \{BB, BG, GB, GG\}$ ، ونعرف قانون الاحتمال بالكتابة

$$\mathbb{P}(BB) = \mathbb{P}(BG) = \mathbb{P}(GB) = \mathbb{P}(GG) = \frac{1}{4}$$

أما الحدث أحد الطفلين ذكر فهو $A = \{BB, BG, GB\}$ والاحتمال المطلوب هو

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(BB|A) &= \frac{\mathbb{P}\big(\{BB\} \cap \{BB, BG, GB\}\big)}{\mathbb{P}(\{BB, BG, GB\})}\\ &= \frac{\mathbb{P}(\{BB\})}{\mathbb{P}(\{BB, BG, GB\})} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

أما إذا كان السؤال ما هو احتمال كون الطفلين ذكرين إذا علمت أن أصغرهما ذكر؟ عندئذٍ يكون الحدث أصغر الطفلين ذكر هو $C = \{BB, GB\}$ ونكتب بناءً عليه ما يأتي

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(BB|C) &= \frac{\mathbb{P}\big(\{BB\} \cap \{BB, GB\}\big)}{\mathbb{P}(\{BB, GB\})}\\ &= \frac{\mathbb{P}(\{BB\})}{\mathbb{P}(\{BB, GB\})} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

مثال

في صف 36 مُتعلّماً منهم 28 أنثى، و منهن 17 تتعلّمن اللغة الانكليزية من أصل 23 يدرسون اللغة الانكليزية. نختار عشوائيّاً طالباً من هذا الصف، إذا رمزنا بالرمز E إلى الحدث "المُتعلّم يدرس اللغّة الانكليزية" وبالرمز G إلى الحدث "المُتعلّم أنثى".

① أكمل جدول المعطيات الآتي.

	E	E'	المجموع
G	17		28
G'			
المجموع			36

② احسب التكرارات النسبية للمتعلّمين بفئاتهم المختلفة في هذا الصف.

③ احسب $\mathbb{P}(E)$ واحسب $\mathbb{P}(E \cap G)$ ثم $\dfrac{\mathbb{P}(E \cap G)}{\mathbb{P}(E)}$.

④ إذا كان المتعلّم الذي جرى اختياره أنثى من الصف نفسه، ما احتمال أن تكون ممن يتعلّمن الانكليزية. قارن إجابتك بالمقدار $\dfrac{\mathbb{P}(E \cap G)}{\mathbb{P}(E)}$.

الحل

① المعطى الوحيد الذي لا يظهر في الجدول هو عدد الذين يدرسون اللغة الإنكليزية الذي يساوي 23 فإذا أضفناه إلى الجدول أصبحت مُتابعة ملئه أمراً يسيراً ونجد:

	E	E'	المجموع
G	17	11	28
G'	6	2	8
المجموع	23	13	36

②بالقسمة على عدد عناصر فضاء العيّنة الذي يساوي 36 نحصل على الجدول التكراري الآتي:

	E	E'	المجموع
G	$\frac{17}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{28}{36}$
G'	$\frac{6}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{8}{36}$
المجموع	$\frac{23}{36}$	$\frac{13}{36}$	1

الذي يمثّل في الحقيقة احتمالات الأحداث الآتية

	E	E'	المجموع
G	$\mathbb{P}(G \cap E)$	$\mathbb{P}(G \cap E')$	$\mathbb{P}(G)$
G'	$\mathbb{P}(G' \cap E)$	$\mathbb{P}(G' \cap E')$	$\mathbb{P}(G')$
المجموع	$\mathbb{P}(E)$	$\mathbb{P}(E')$	1

③ نقرأ إذن من الجدول $\mathbb{P}(E) = \frac{23}{36}$ و $\mathbb{P}(E \cap G) = \frac{17}{36}$ ومن ثَمّ $\frac{17}{23} = \frac{\mathbb{P}(E \cap G)}{\mathbb{P}(E)}$.

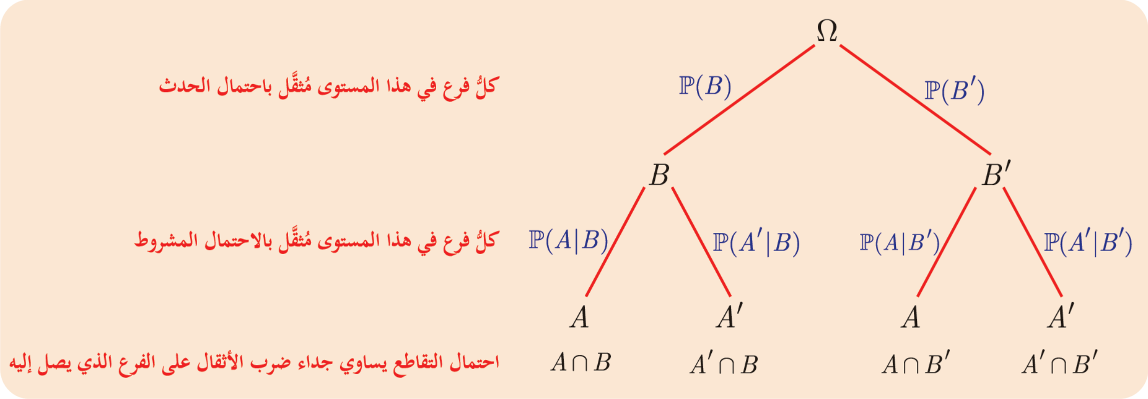
④ عدد الذين يدرسون الإنكليزية يساوي 23 بينهم 17 مُتعلّمة إذن $\mathbb{P}(G \,|\, E) = \frac{17}{23}$. لاحظ أنّ

$$\frac{\mathbb{P}(E \cap G)}{\mathbb{P}(E)} = \mathbb{P}(G \,|\, E)$$

2.3 التمثيل الشجري للتجارب الاحتماليّة المركّبة

ليكن الحدثان A و B ولنفترض أنّ $\mathbb{P}(B) \neq 0$، ولننظر في الوضع الآتي: نُجري تجربة ونرصد فيها وقوع الحدث B وثُمّ نتبع ذلك برصد وقوع الحدث A. قد يؤثر وقوع الحدث B على فرص وقوع الحدث A.

يمكن تمثيل حالات الاحتمال المشروط هذه بتمثيل شجري كما يأتي:



أمّا مجموع احتمالات الفروع النازلة من كلّ عقدة فيساوي دوماً الواحد. وإذا جمعنا جداءات ضرب أثقال الفروع التي تؤدي إلى الحدث نفسه A فنحصل على احتمال الحدث A، كما تبيّن المبرهنة الآتية:

مُبرهَنة 2

ليكن B حدثاً يحقق $0 < \mathbb{P}(B) < 1$، أياً كان الحدث A كان

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B')\mathbb{P}(B').$$

الإثبات

في الحقيقة، $A\cap B$ و $A\cap B'$ حدثان منفصلان و $A = (A\cap B)\cup(A\cap B')$ إذن

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A\cap B) + \mathbb{P}(A\cap B')\\ &= \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B')\mathbb{P}(B')\end{aligned}$$

وهي النتيجة المرجوّة.

تكريساً للفهم

من أين جاء هذا التعريف للاحتمال المشروط ؟

- لما كان وقوع الحدث $A\cap B$ يقتضي وقوع الحدث A، فمن الطبيعي أن يكون «احتمال وقوع حدث A علماً أن الحدث B قد وقع» متناسباً طرداً مع $\mathbb{P}(A\cap B)$ أي يوجد عدد λ، لا يتعلّق بالحدث A، يحقّق $\mathbb{P}(A|B) = \lambda\mathbb{P}(A\cap B)$. ولتعيين ثابت التناسب λ نلاحظ أن «احتمال وقوع الحدث الأكيد Ω علماً أن الحدث B قد وقع» يساوي الواحد: $\mathbb{P}(\Omega|B) = 1$ أي $\lambda\mathbb{P}(\Omega\cap B) = \lambda\mathbb{P}(B) = 1$ ومنه $\lambda = \dfrac{1}{\mathbb{P}(B)}$ وبالتعويض نجد $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

لماذا يسمّى الاحتمال المشروط احتمالاً؟

▫ لنتأمّل حدثاً B يحقّق $\mathbb{P}(B) \neq 0$. وليكن A حدثاً ما. عندئذ نستنتج من كون الحدثين $A \cap B$ و $A' \cap B$ منفصلين واجتماعهما يساوي B أنّ $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A' \cap B) \geq \mathbb{P}(A \cap B)$، إذن

$$0 \leq \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \leq 1$$

وفوق ذلك من الواضح أنّ $\mathbb{P}(\Omega|B) = 1$.

وأخيراً إذا كان A و C حدثين منفصلين $(A \cap C = \varnothing)$. كان من الواضح أنّ $\mathbb{P}(A \cup C|B) = \mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(C|B)$.

وعليه فإنّ التابع الذي يقرن بكل حدث الاحتمال المشروط لهذا الحدث علماً أنّ B قد وقع، يحقّق جميع خواص قانون الاحتمال نفسه.

تَدرَّبْ

① الجدول الآتي يبين عدد الكتب المباعة يوميّاً في مكتبة.

	اللّغة العربيّة	اللّغة الفرنسيّة	اللّغة الانكليزيّة	المجموع
الكتب العلميّة	20	5	15	40
الكتب الثقافيّة	33	10	12	55
المجموع	53	15	27	95

دخل زبون واشترى كتاباً من هذه المكتبة، المطلوب:

1. ما احتمال شرائه لكتاب باللغة العربية علماً أنه كتاب علمي؟
2. ما احتمال شرائه لكتاب ثقافي علماً أنه باللغة الانكليزية؟

② مغلف يحتوي 6 بطاقات متماثلة سجل على كل منها أحد الأعداد الآتية: $0, 1, 1, 1, 2, 2$ نسحب من المغلف بطاقتين بالتتالي بدون إعادة البطاقة المسحوبة.

إذا علمت أن مجموع العددين المسجلين على البطاقتين يساوي 2، ما احتمال أن تحمل إحدى البطاقتين المسحوبتين العدد 1؟

③ يحتوي مغلف على 7 بطاقات مرقمة من 1 إلى 7، نسحب من المغلف بطاقتين عشوائيّاً بالتتالي دون إعادة، إذا علمت أن مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين فرديّ، ما احتمال أن تحمل إحداها الرقم 4؟

④ يحوي صندوق 8 كرات (5 بيضاء و 3 سوداء) سُحب عشوائيّاً من الصّندوق كرتان معاً. ما احتمال أنّ تكون الكرتان المسحوبتان بيضاوين إذا علمت أنّهما كانتا من لون واحد؟

⑤ في إحدى مراحل لعبة إلكترونيّة أمام اللاعب خياران: إما أن يتسلّق الجبل M_1 واحتمال وصوله إلى القمة عندئذ يساوي $\frac{1}{3}$، أو أن يتسلّق الجبل M_2 واحتمال وصوله إلى القمة عندئذ يساوي $\frac{1}{4}$، نفترض أنّ احتمال أن يتسلّق الجبل M_1 يساوي احتمال أن يتسلّق الجبل M_2. ونتأمّل الأحداث:

- الحدث A : «يتسلّق اللّاعب الجبل M_1»
- الحدث B : «يتسلّق اللّاعب الجبل M_2»
- الحدث G : «وصول اللّاعب إلى قمة جبل»

❶ احسب الاحتمالات الآتية $\mathbb{P}(A \cap G)$ و $\mathbb{P}(B \cap G)$.

❷ استنتج قيمة $\mathbb{P}(G)$.

⑥ في دراسة إحصائية تبين أن 53% ممن يمارسون الرياضة رجالٌ، و 31% منهم يرتادون نادياً رياضيّاً، وفي الوقت ذاته 21% من النساء اللواتي يمارسن الرياضة يرتدن نادياً رياضياً. نتأمّل الأحداث الآتية:

- الحدث M : «الشخص الذي يمارس الرياضة رجل»
- الحدث F : « الشخص الذي يمارس الرياضة امرأة»
- الحدث C : « الشخص الذي يمارس الرياضة يرتاد نادياً رياضياً»

❶ اكتب معطيات المسألة مستعملاً ترميزات الاحتمال.

❷ احسب احتمال أن يكون من يمارس الرياضة رجلاً يرتاد نادياً رياضياً.

❸ احسب احتمال أن يكون من يمارس الرياضة امرأة ترتاد نادياً رياضياً.

❹ احسب $\mathbb{P}(C)$.

4 الاستقلال الاحتمالي

من المسائل المهمّة في حساب الاحتمال دراسة العلاقات الاحتماليّة بين الأحداث، فإذا كان A و B حدثين متعلّقين بتجربة معيّنة فإن وقوع أحد الحدثين قد يؤثر على احتمال وقوع الحدث الآخر. ولكن إذا لم يفعل قلنا إنّ هذين الحدثين مستقلّان احتماليّاً. التعريف الآتي يضع تعريفاً دقيقاً لهذا المفهوم.

تعريف 6

نقول إنّ الحدثين A و B مستقلان احتمالياً إذا وفقط إذا تحقّق الشرط $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$.

في حالة $P(B)\neq 0$، يُكافئ الاستقلال الاحتمالي للحدثين A و B أن يكون

$$\mathbb{P}(A|B)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)}=\mathbb{P}(A)$$

أي إن احتمال وقوع الحدث A لا يتغير بتأثير وقوع الحدث B.

مثال في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة، ليكن A الحدث الموافق لظهور وجه عدد نقاطه زوجي، وليكن B الحدث الموافق لظهور وجه عدد نقاطه مربّع لعدد صحيح، برهن أنّ الحدثين A و B مستقلّان احتماليّاً.

الحل

لدينا $A=\{2,4,6\}$ و $B=\{1,4\}$ و $A\cap B=\{4\}$ إذن

$\mathbb{P}(A)=\frac{1}{2}$ و $\mathbb{P}(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ وأخيراً $\mathbb{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$.

نستنتج أنّ $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$ فالحدثان A و B مستقلّان احتماليّاً.

مبرهنة

إذا كان الحدثان A و B مستقلّين احتمالياً كان الحدثان A و B' مستقلّين احتماليّاً أيضاً.

الإثبات

$$\mathbb{P}(A\cap B')=\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(A\cap B)$$

ولما كان الحدثان A و B مستقلّين احتماليّاً كان

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cap B')&=\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\\&=\mathbb{P}(A)\big(1-\mathbb{P}(B)\big)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B')\end{aligned}$$

فالحدثان A و B' مستقلّان احتماليّاً.

نتيجة

إذا كان الحدثان A و B مستقلّين احتماليّاً، كان الحدثان A' و B مستقلّين احتماليّاً وكذلك كان الحدثان A' و B' مستقلّين احتماليّاً أيضاً.

مثال

يُطلق راميان، كلٌّ منهما على حِدَتِهِ، طلقةً واحدة على هدف. نفترض أنّ احتمال أن يصيب الرامي الأوّل الهدف يساوي $\frac{6}{10}$ (الحدث A)، واحتمال أن يصيب الرامي الثاني الهدف يساوي $\frac{7}{10}$ (الحدث B).

① ما احتمال أن يصيب الراميان الهدف معاً؟

② ما احتمال أن يصيب أحدهما على الأقل الهدف؟

③ ما احتمال عدم إصابة الهدف؟

④ ما احتمال أن يصيب أحدهما فقط الهدف؟

⑤ إذا علمت أنّ أحدهما على الأقل أصاب الهدف، فما احتمال أنّ يكون هو الرامي الأوّل فقط؟

⑥ إذا علمت أنّ أحدهما على الأقل أصاب الهدف، فما احتمال أنّ يكون هو الرامي الأوّل؟

الحل

استناداً إلى النصّ لدينا: $\mathbb{P}(A)=\frac{6}{10}$ و $\mathbb{P}(B)=\frac{7}{10}$.

① إنّ إصابة أحد الراميين الهدف لا تؤثر في احتمال إصابة الآخر للهدف فالحدثان A و B مستقلّان احتماليّاً، ومنه

$$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)=\frac{6}{10}\times\frac{7}{10}=\frac{21}{50}$$

② احتمال أن يصيب أحدهما على الأقلّ الهدف هو احتمال الحدث $A\cup B$:

$$\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{6}{10}+\frac{7}{10}-\frac{42}{100}=\frac{22}{25}$$

③ إنّ عدم إصابة الهدف من أيٍّ من الراميين توافق الحدث $(A\cup B)'$ إذن

$$\mathbb{P}((A\cup B)')=1-\mathbb{P}(A\cup B)=\frac{3}{25}$$

كما إنّ هذا الحدث يوافق $A'\cap B'$، وهذان الحدثان مستقلان احتمالياً، إذن

$$\mathbb{P}(A'\cap B')=\mathbb{P}(A')\cdot\mathbb{P}(B')=\frac{2}{5}\times\frac{3}{10}=\frac{3}{25}$$

فهذا أسلوب آخر للوصول إلى الإجابة ذاتها.

④ ليكن C الحدث الموافق لإصابة أحد الراميَيْن فقط الهدف. عندئذ يقع الحدث $A \cup B$ إذا وقع الحدث C أو إذا أصاب الراميان الهدف معاً، ومنه

$$C \cup (A \cap B) = A \cup B$$

إذن، اعتماداً على نتائج الطلبين ① و ② نجد

$$\mathbb{P}(C) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{44}{50} - \frac{21}{50} = \frac{23}{50}$$

أويمكننا القول إنّ $C = (A \cap B') \cup (B \cap A')$ ونستفيد من الاستقلال الاحتمالي للأحداث A' و B وللأحداث A و B' لنجد مُجدّداً:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(A \cap B') + \mathbb{P}(A' \cap B)\\ &= \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B') + \mathbb{P}(A') \cdot \mathbb{P}(B)\\ &= \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{23}{50}\end{aligned}$$

⑤ إنّ الحدث الموافق لإصابة الرامي A فقط الهدف هو $A_1 = A \cap B'$. إذن بالاستفادة من الاستقلال الاحتمالي للحدثين A و B' يمكننا أن نكتب

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A \cap B') = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B') = \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{50}$$

أمّا الاحتمال المشروط المطلوب فهو $\mathbb{P}(A_1 | (A \cup B))$ فيُحسب كما يأتي

$$\mathbb{P}(A_1 | (A \cup B)) = \frac{\mathbb{P}\big((A \cup B) \cap A_1\big)}{\mathbb{P}(A \cup B)} = \frac{\mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(A \cup B)} = \frac{9}{50} \Big/ \frac{22}{25} = \frac{9}{44}$$

⑥ الاحتمال المشروط المطلوب هو $\mathbb{P}(A | (A \cup B))$ ويحسب كما يأتي

$$\mathbb{P}(A | (A \cup B)) = \frac{\mathbb{P}((A \cup B) \cap A)}{\mathbb{P}(A \cup B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A \cup B)} = \frac{3}{5} \Big/ \frac{22}{25} = \frac{15}{22}$$

تَدَرَّبْ

① تقدّم طالبان إلى امتحان اللّغة الإنكليزيّة. احتمال نجاح الأول $\frac{3}{4}$، واحتمال نجاح الثاني $\frac{4}{5}$.

1. ما احتمال نجاحهما معاً؟
2. ما احتمال نجاح أحدهما على الأقل؟

② وُجِدَ في أحد المشافي أن 50% من المرضى يعانون من ارتفاع ضغط الدم، وأن 30% من المرضى مصابون بمرض التهاب الكبد وأن 20% يعانون من المرضين معاً. هل ارتفاع ضغط الدم ومرض التهاب الكبد مستقلّان احتماليّاً ؟

أفكار يجب تَمثُّلها

- كلّ نتيجة a_i في تجربة عشوائيّة ترتبط باحتمال p_i ومجموع الأعداد p_i يساوي 1. إنّ p_i هو احتمال الحصول على النتيجة a_i $(0 \leq p_i \leq 1)$.
- الحدث هو مجموعة جزئيّة من Ω. وإذا احتوت هذه المجموعة الجزئيّة على عنصر وحيد قلنا إنّ الحدث بسيط.
- يقع الحدث A عندما نحصل على إحدى النتائج التي تكوّن A. احتمال A هو مجموع احتمالات النتائج المنتمية إلى A.
- في حال كون النتائج متساوية الاحتمال، كلّ النتائج لها الاحتمال $\frac{1}{n}$ نفسه (حيث n هو عدد هذه النتائج).
- كون النتائج الممكنة متساوية الاحتمال يتعلّق بالتجربة. ويُعبَّر عن هذه الخاصّة بعبارات معيّنة مثل «اختيار عشوائيّ»، «قطعة متوازنة»، «نرد مثالي» (متناظر، متجانس...). وهذه الخاصّة تتعلّق أيضاً بفضاء العيّنة المختار: فعندما نسحب عشوائيّاً كرة من صندوق، فإنّ كلّ كرة لها الحظّ نفسه في الظهور. أمّا إذا كان اهتمامنا بلون الكرة فقط وكان فضاء التجربة هو مجموعة الألوان، فالنتائج ليست بالضرورة متساوية الاحتمال.
- لكلّ حدث A حدث معاكس A'. عندما نعلم $\mathbb{P}(A)$ فإنّنا نعلم $\mathbb{P}(A')$: $\mathbb{P}(A') = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- عندما نعرف ثلاثة أعداد من الأعداد الأربعة $\mathbb{P}(A)$، $\mathbb{P}(B)$، $\mathbb{P}(A \cup B)$، $\mathbb{P}(A \cap B)$ فإنّنا نعرف العدد الرابع لأنّ:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

- إذا كان B حدثاً احتمال وقوعه لا يساوي الصفر كان الاحتمال المشروط لوقوع حدث A علماً أنّ الحدث B قد وقع يساوي $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.
- كثيراً ما تفيد علاقة حساب الاحتمال المشروط في حساب احتمال تقاطع حدثين إذ نكتب

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$$

- هناك أحداث توحي صياغتها بأنها مستقلّة كما هي حال الأحداث في مسائل الرمي المتتالي على هدف، إلقاء قطعة نقود مرتين أو أكثر، إلقاء حجر نرد مرتين أو أكثر، والأحداث الناتجة عن تجربة يجري فيها السحب بالتتالي مع الإعادة، وبوجه عامّ الأحداث الناتجة عن تكرار تجربة في الشروط نفسها عدداً من المرات.
- هناك أحداث لا يمكن الحكم مباشرة على استقلالها الاحتمالي إلاّ بالتوثّق من تحقّق الشرط

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

منعكسات يجب امتلاكُها

- قبل البدء بأيّ تمرين علينا أوّلاً تحديد مجموعة النتائج الممكنة، ويُفضّل اختيار نتائج متساوية الاحتمال إن أمكن.
- في حال كون النتائج متساوية الاحتمال، نعلم أنّه لحساب احتمال حدث ما A، يكفي أن نعرف عدد عناصره m، ويكون $\mathbb{P}(A)=\frac{m}{n}$ (حيث n عدد النتائج الممكنة).
- يمكن حساب $\mathbb{P}(A)$ من $\mathbb{P}(A')$ وذلك عندما يكون حساب $\mathbb{P}(A')$ أسهل وذلك بالاستفادة من العلاقة $\mathbb{P}(A')=1-\mathbb{P}(A)$.
- الأحداث التي نحصل عليها من تكرار التجربة ذاتها عدداً من المرّات تكون عادة مستقلّة عشوائيّاً.

أخطاءٌ يجبُ تجنُّبها

- إذا لم تكن النتائج متساوية الاحتمال لا يجوز استعمال العلاقة:

$$\mathbb{P}(A)=\frac{m}{n}=\frac{A \text{ عدد عناصر}}{\Omega \text{ عدد عناصر}}$$

- في الحالة العامّة $\mathbb{P}(A\cup B)\neq\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$.
- إنّ المساواة $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$ صحيحة فقط إذا كان الحدثان A و B مستقلّين احتماليّاً ومن ثَم لا يمكن استعمالها إلا بعد التيقُّن من كون الحدثين A و B مستقلّين احتماليّاً.

تمرينات ومسائل

1 في التجارب الآتية، حدّد فضاء العيّنة للتجربة العشوائيّة، وعدد النتائج الممكنة.

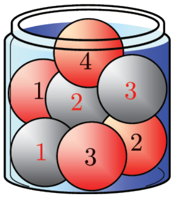
① نلقي نرداً مكعّباً فيه وجه عليه الرقم 1، ووجهان عليهما الرقم 2 والوجوه المتبقّية عليها الرقم 3.

② نلقي نردين: الأوّل أزرق والثاني أحمر. نسجّل العدد الذي يتكوّن على النحو الآتي: يُحدّد رقم الآحاد بالوجه العلوي للنرد الأحمر، ورقم العشرات بالوجه العلوي للنرد الأزرق.

③ نلقي ثلاث قطع نقديّة مرقّمة 1 و 2 و 3. نسجّل الوجوه الثلاثة الظاهرة على شكل ثلاثيّة، فمثلاً الثلاثيّة THH تعني أنّنا حصلنا على الوجه T في القطعة الأولى وعلى الوجه H في القطعتين الباقيتين.

④ نلقي قطعة نقود واحدة ثلاث مرّات متتالية. ونسجّل بالترتيب الوجه التي يظهر في كلّ رمية.

2 يحوي صندوق سبع كرات، ثلاث منها سوداء ومرقّمة $1, 2, 3$، وأربع حمراء مرقّمة $1, 2, 3, 4$. نسحب عشوائيّاً كرة من الصندوق.



① احسب احتمالات الأحداث الآتية:

A : « الكرة المسحوبة سوداء ».

B : « الكرة المسحوبة حمراء ».

C : « تحمل الكرة المسحوبة رقماً زوجيّاً ».

② احسب احتمالات الأحداث $A \cap B$ و $A \cap C$ و $B \cap C$ و $A \cup B$ و $A \cup C$ و $B \cup C$.

3 في تجربة عشوائيّة، A و B حدثان يحقّقان

$\mathbb{P}(A') = 0.44$ و $\mathbb{P}(B') = 0.63$ و $\mathbb{P}((A \cup B)') = 0.32$.

احسب $\mathbb{P}(A \cap B)$.

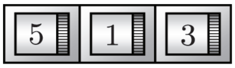
4 صندوقان متماثلان فيهما كرات متماثلة. الصندوق (I) يحوي ثلاث كرات مرقّمة بالأرقام $1, 2, 3$ ويحوي الصندوق (II) أربع كرات مرقّمة بالأرقام $2, 3, 4, 5$. نسحب عشوائيّاً كرة من الصندوق (I) ثم نسحب كرة من الصندوق (II). نتأمّل الحدثين:

A : إحدى الكرتين على الأقل تحمل الرقم 3.

B : مجموع رقمي الكرتين أكبر تماماً من 5.

هل الحدثان A و B مستقلّان احتماليّاً؟

5 احتمال الحصول على العدد السرّي



يتطلّب فتح حقيبة، معرفة عدد سرّيّ مؤلّف من ثلاث خانات بين 0 و 9.
لنشكّل عشوائيّاً عدداً مؤلّفاً من ثلاث خانات. ولنتأمّل الأحداث:

A : « العدد المختار هو العدد السري الصحيح».

B : « العدد المختار مؤلّف من ثلاثة أرقام مختلفة».

C : « في العدد المختار رقمان متساويان فقط».

احسب $\mathbb{P}(A)$ و $\mathbb{P}(B)$ و $\mathbb{P}(C)$.

نحو الحلّ

لنحدّد أوّلاً النتائج الممكنة واحتمالاتها. العدد المختار هو قائمة مرتّبة من ثلاثة خانات ليست بالضرورة مختلفة. نختار إذن مجموعة الثلاثيّات (a,b,c) بصفتها مجموعة النتائج الممكنة، حيث يعبّر كلّ رمز a أو b أو c عن رقم بين 0 و 9. نختار كلّ خانة من الخانات الثلاث بشكل عشوائي، فتكون النتائج الممكنة متساوية الاحتمال. لذلك يعود حساب احتمال حدث ما إلى عدّ عناصر هذا الحدث.

① احسب عدد النتائج الممكنة (استعمل طريقة الشجرة أو مَلء الخانات).

② احسب عدد الأعداد التي تحقّق B.

③ لحساب عدد الأعداد التي تحقّق C

- نضع رقمين متماثلين في خانتين مختارتين، كم خياراً لدينا لملء الخانة الثالثة؟
- بكم طريقة يمكننا وضع رقمين متماثلين في خانتين؟

أنجزِ الحل واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

6 إلقاء قطعة نقود عدّة مرّات

نلقي قطعة نقديّة متوازنة ستّ مرّات ونسجّل بالترتيب الجهة الظاهرة H أو T. بيّن أيُّ الحدثين الآتيين هو الأكثر احتمالاً:

A : « ظهور ثلاثة وجوه T فقط».

B : « ظهور 4 وجوه T فقط ، أو ظهور وجهين T فقط».

نحو الحلّ

- لنحدّد أوّلاً النتائج الممكنة واحتمالاتها. أيُّ نتيجة ممكنة هي قائمة مرتّبة من ستّة حروف من بين الحرفين T و H، مثلاً $HHTTHH$. ولمّا كانت القطعة متوازنة، فإنّ احتماليّ ظهور T أو H متساويان لدى إلقاء القطعة في كلّ مرّة. هذا يقضي أنّ النتائج متساوية الاحتمال. لذلك يفضلّ أن نأخذ مجموعتها Ω فضاءً للتجربة.
ما هو عدد النتائج الممكنة؟
- إنّ النتائج الممكنة متساوية الاحتمال، لذلك يعود حساب احتمال حدث ما إلى عدّ عناصر هذا الحدث. وإذا استعملنا طريقة ملء الخانات لعدّ عناصر A مثلاً، يمكننا ملء ثلاث خانات نختارها بالحرف T ونملأ الخانات المتبقّية بالحرف H. لاحظ أنّه يمكننا اختيار الخانات $3,2,1$ أو $4,2,1$ .... إنّ الحدث B هو اجتماع حدثين منفصلين C و D.

① ما عدد نتائج الحدث A؟ واستنتج $\mathbb{P}(A)$.

② احسب $\mathbb{P}(C)$ و $\mathbb{P}(D)$ واستنتج $\mathbb{P}(B)$.

أنجزِ الحل واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

7 سحب عناصر في آن معاً

لتصوير مشهد إعلانيّ لحليب أطفال، على المخرج اختيار طفلين من سبعة أطفال: ثلاثة صبية وأربع بنات. ما احتمال أن يختار بنتين اثنتين؟

نحو الحلّ

لنحدّد أوّلاً النتائج الممكنة. كلّ نتيجة هي مجموعة جزئيّة من طفلين، ولا أهميّة للترتيب. لتبسيط الأمر يمكن أنّ نعبّر عن الأطفال برموز مثلاً G_1, G_2, G_3, G_4 للبنات و B_1, B_2, B_3 للصبية. يقضي الاختيار العشوائيّ بتساوي احتمالات النتائج. يبقى علينا إيجاد عدد هذه النتائج.

- يمكننا كتابة كلِّ النتائج الممكنة وعدُّها مع مراعاة أنّ $\{B_1, G_2\}$ و $\{G_2, B_1\}$، مثلاً، هما نتيجة واحدة وهذا قد يتطلّب وقتاً طويلاً.
- يمكننا بدلاً من ذلك عدّ الثنائيّات المرتّبة أوّلاً ومن ثمّ استنتاج عدد المجموعات الجزئيّة المكوّنة من عنصرين.

① عدد النتائج الممكنة.

② احسب عدد النتائج الموافقة للحدث المطلوب أي التي تتألّف من بنتين.

أنجزِ الحل واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

8 باقة من الأزهار

مجموعة من الأزهار 60% منها حمراء اللّون والباقي أصفر اللّون. نصف عدد الأزهار الحمراء و 80% من الصفراء من القرنفل. اخترنا من المجموعة زهرة عشوائيّاً. ما احتمال أن تكون حمراء اللّون علماً أنها قرنفلة.

نحو الحلّ

☝ لنبدأ باختيار رموز مناسبة للأحداث المتعلّقة بالمسألة المطروحة.

R : يمثّل الحدث « اختيار زهرة حمراء».

Y : يمثّل الحدث « اختيار زهرة صفراء».

C : يمثّل الحدث « اختيار زهرة قرنفل».

ثمّ لنعبّر عن معطيات المسألة. ما قيم الاحتمالات $\mathbb{P}(R)$ و $\mathbb{P}(C\,|\,R)$ و $\mathbb{P}(C\,|\,Y)$ وفق نص المسألة؟

✌ الاحتمال المطلوب هو $\mathbb{P}(R|C)$، ولحسابه نحتاج إلى حساب احتمال كلّ من الحدثين $R\cap C$ و C.

① استعمل علاقة الاحتمال المشروط لتحسب $\mathbb{P}(R\cap C)$ بدلالة $\mathbb{P}(R)$ و $\mathbb{P}(C\,|\,R)$.

② احسب $\mathbb{P}(R)$، واستنتج $\mathbb{P}(C)$.

أنجزِ الحل واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

قُدُماً إلى الأمام

9 قصّة عامل ريزوس

يُصنّف الدم البشري في أربع زمر منفصلة A و B و AB و O. وأيّاً كانت الزمرة، فإمّا أن تملك عامل ريزوس *Rhesus factor* (ونرمز إلى ذلك بالرمز Rh^+) أو لا تملك هذا العامل (ونرمز إلى ذلك بالرمز Rh^-). من بين سكّان إحدى البلدان، هناك 40% منهم زمرتهم الدمويّة A و 10% زمرتهم B و 5% زمرتهم AB و 45% زمرتهم O. نعلم بالإضافة إلى ذلك أنّ:

	A	B	AB	O
Rh^+	82%	81%	83%	80%
Rh^-	18%	19%	17%	20%

نقول عن شخص زمرته الدمويّة O وعامل ريزوس لديه سلبي إنّه متبرّع مطلق. نختار شخصاً عشوائياً، ما احتمال أن يكون: متبرعاً مطلقاً؟ وما احتمال أن يكون عامل ريزوس لديه سلبيّاً؟

10 نمذجة التجربة

نمثّل سباقاً بين الأرنب والسلحفاة بتجربة إلقاء نرد مثاليّ. عندما نحصل على 6 يربح الأرنب، أمّا في الحالات الأخرى فتتقدّم السلحفاة خانة واحدة وتربح عندما تقطع ستّ خانات.

يتكوّن فضاء العيّنة من نتيجتين هما R : «يربح الأرنب» و T : «تربح السلحفاة». المطلوب حساب أحد الاحتمالين $\mathbb{P}(R)$ أو $\mathbb{P}(T)$ (لأنّ $\mathbb{P}(R)+\mathbb{P}(T)=1$). لنتأمّل الحدث T. يتحقّق هذا الحدث إذا كانت نتيجة إلقاء النرد ستّ مرّات متتابعة مختلفة عن 6. هناك 6^6 طريقة لإلقاء النرد ستّ مرّات متتابعة. والنتائج هنا متساوية الاحتمال. علينا إذن حساب عدد النتائج التي تؤدّي إلى ربح السلحفاة. احسب احتمال T. واستنتج احتمال R.

11 صحّ أم خطأ

بيّن، مُعلّلاً إجابتك، الصّحيح من الخطأ في الاستنتاجات الآتية.

① لتكن a و b و c ثلاثة أعداد من المجال $[0,1]$، وهي بهذا الترتيب حدودٌ متوالية في متتالية هندسيّة. وليكن $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ فضاء العيّنة لتجربة عشوائيّة نفترض أنّ $\mathbb{P}(1)=\mathbb{P}(2)=a$، $\mathbb{P}(3)=\mathbb{P}(4)=b$ و $\mathbb{P}(5)=\mathbb{P}(6)=c$. إذن $b=\frac{1}{6}$.

② نلقي قطعة نقديّة متوازنة عشر مرّات. إنّ احتمال أن نحصل على الوجه F في المرّات العشر أقلّ من 0.001.

③ إذا كان A و B حدثين في تجربة عشوائيّة، كان $\mathbb{P}(A'\cap B')=1-\mathbb{P}(A\cap B)$.

④ نلقي نرداً مثاليّاً مرّتين، ونسجّل الرقمين الناتجين a و b بالترتيب. إنّ احتمال أن يكون للمعادلة $x^2+ax+b=0$ جذر حقيقيّ على الأقلّ هو $\frac{1}{2}$.

12

يذهب أربعة أصدقاء إلى دار للسينما فيها أربع قاعات. يختار كلّ واحد منهم قاعةً عشوائيّاً وبشكلٍ مستقلّ عن الآخرين. احسب احتمالات الأحداث الآتية:

A : «أن يختاروا أربع قاعات مختلفة».

B : «اثنان على الأقلّ منهم في قاعة واحدة».

C : «جميعهم في قاعة واحدة».

1

نختار عشوائيّاً عدداً طبيعيّاً بين 1 و 1000. نفترض أنّ الاختيارات متساوية الاحتمال. ما هو احتمال أن يكون العدد:

① مربّع عدد طبيعيّ. ② مكعّب عدد طبيعيّ. ③ لا مربّع ولا مكعّب عدد طبيعيّ.

14 ليكن $ABCD$ رباعيّ وجوه منتظماً. تتنقّل خنفساء على أحرف هذا الرباعيّ وِفق القواعد الآتية: ① الزمن اللّازم لقطع أحد الأحرف دقيقة واحدة. ② عندما تكون على أحد الرؤوس، تختار الحرف الذي ستمشي عليه عشوائيّاً. ③ تنطلق الخنفساء من الرأس A. احسب احتمالات الأحداث الآتية.

A : « تعود الخنفساء إلى A بعد ثلاث دقائق».

B : « لا تمرّ الخنفساء بالرأس C في الدقائق الثلاث الأولى».

15 يحوي صندوق 19 كرة مرقّمة من 1 إلى 19. نسحب عشوائيّاً ثلاث كرات تباعاً ودون إعادة. ليكن k عدداً طبيعيّاً بين 3 و 16، $(3 \leq k \leq 16)$. ولنتأمّل الحدثين الآتيين:

A_k : « k هو أصغر الأرقام المسحوبة». B_k : « k هو أكبر الأرقام المسحوبة».

ما هي قيم k التي تجعل $\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(B_k)$ ؟

16 يحوي صندوق ثلاث كرات متماثلة كتب عليها الأحرف «ح»، «ب»، «ر». نسحب الكرات الثلاث على التوالي دون إعادة، ونسجّل الأحرف التي نحصل عليها. لتكن E مجموعة الكلمات التي نحصل عليها في هذه التجربة. احسب احتماليّ الحدثين الآتيين:

A : «حصلنا على كلمة بحر».

B : «بدأت الكلمة الناتجة بالحرف «ح»».

17 تنهي الجارتان A و B عملهما معاً، تستقل كل منهما قطار الساعة 6 إن أمكنها وإلا فإنها تستقلّ قطار الساعة 6:30. لنفترض أن وقت انتهاء عمل كل منهما غير متعلّق بالأخرى. إذا كان احتمال أن تستقلّ A قطار الساعة 6 يساوي 0.9 واحتمال ان تستقله B يساوي 0.8. ما احتمال ان تلتقي الجارتان في القطار نفسه؟

1 يحتوي كيس على 24 بطاقة مرقّمة من 1 إلى 24، نسحب بطاقة عشوائيّاً.

- الحدث T : « رقم البطاقة المسحوبة بطاقة من مضاعفات العدد 3».
- الحدث F : « رقم البطاقة المسحوبة أصغر تماماً من 15».
- الحدث E : « رقم البطاقة المسحوبة زوجي».

① احسب $\mathbb{P}(T)$ ، $\mathbb{P}(F)$ ، $\mathbb{P}(F \cap T)$ ، هل الحدثان T و F مستقلّان احتماليّاً؟

② احسب $\mathbb{P}(T|E)$ ، هل الحدثان T و E مستقلّان احتماليّاً؟

18 في أحد المستوصفات تم تسجيل معلومات عن عيّنات الدم المسحوبة من المرضى وملاحظة زمرهم الدمويّة وعامل الريزوس (إيجابي أو سلبي) وكانت النسب المئويّة للزمر الدمويّة للعيّنات كما في الجدول:

الزمرة	A	B	AB	O
عامل ريزوس إيجابي	$32.8\,\%$	8.1%	$4.15\,\%$	36%
عامل ريزوس سلبي	$7.2\,\%$	$1.9\,\%$	$0.85\,\%$	$9\,\%$

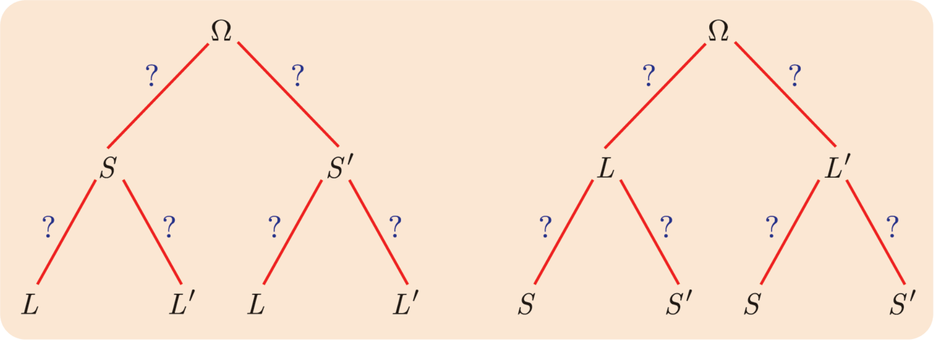
① إذا كانت زمرة الدم O ما احتمال أن يكون عامل الريزوس سلبي؟

② إذا كان عامل الريزوس سلبيّاً ما احتمال أن تكون زمرة الدم O؟

19 في أحد الصفوف $50\,\%$ من الطلاب يحبون المطالعة و $75\,\%$ يحبون الرياضة و $40\,\%$ يحبون الرياضة والمطالعة معاً. نختار عشوائيّاً طالباً، ونتأمّل الحدثين الآتيين:

L: « الطالب يحبّ المطالعة »　　S: « الطالب يحبّ الرياضة ».

① أكمل المخطّطين الشجريّين الآتيين:



② إذا كان الطالب يحبّ الرياضة ما احتمال أن يحبّ المطالعة ؟

③ إذا كان الطالب يحبّ المطالعة ما احتمال أن يحبّ الرياضة ؟

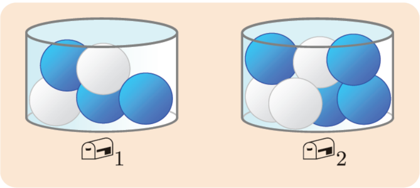
20 قرر أستاذ لطيف في مادة الاحتمالات أن يعطي الحظ فرصته في نجاح الطلاب. فصنع عدداً $n = 100$ من البطاقات المتماثلة ورقّمها من 1 إلى n ووضع قاعدة النجاح الآتية:

- يختار الطالب عشوائيّاً ورقة ويسجل رقمها R_1، ثُم يعيدها ، ويُعد ناجحاً إذ كان الرقم الذي حصل عليه أكبر تماماً من $p = 50$.
- إذا لم ينجح، يذهب إلى امتحان الإكمال، فيختار عشوائيّاً ورقة ويسجّل رقمها R_2، ثُم يعيدها، ويُعدّ ناجحاً إذ كان مجموع النتيجتين $R_1 + R_2$ أكبر تماماً من $q = 60$.

① احسب احتمال أن ينجح الطالب في مقرر الاحتمالات

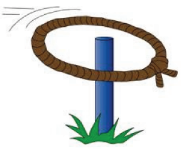
② إذا نجح طالبٌ فما احتمال أن يكون قد نجح دون المرور بالإكمال؟

21 لنتأمّل صندوقين U_1 و U_2 يحتوي كلٌّ منهما على عدد من الكرات. يوجد في الصندوق U_1 كرتان بيضاوان وثلاث كرات زرقاء، في حين يوجد في الصندوق U_2 ثلاث كرات بيضاء وأربع كرات زرقاء. نُجري التجربة الآتية: نسحب سحباً عشوائيّاً كرة من الصندوق U_1 ونضعها في الصندوق U_2 ثُمّ نسحب عشوائياً كرة من الصندوق U_2 ونتفحّص لونها، ما هو احتمال أن تكون زرقاء؟ **مساعدة**: عرّف الحدثين A : «الكرة المسحوبة من U_2 زرقاء» و B : «الكرة المسحوبة من U_1 زرقاء».



22 يوجد في مدينة مَصْنعان للمصابيح. $\frac{1}{5}$ من المصابيح التي ينتجها المصنع I معطوبة و $\frac{1}{20}$ من المصابيح التي ينتجها المصنع II معطوبة أيضاً. نفترض أن المصنع الأوّل I ينتج في أسبوع واحد ضعفي عدد المصابيح التي ينتجها المصنع الثاني في أسبوع. ما هو احتمال أن يكون مصباحٌ مسحوبٌ عشوائيّاً من إنتاج المصنعين في أحد الأسابيع صالحاً ؟ **مساعدة**: عرّف الحدثين A: «المصباح المسحوب صالح» و B: «المصباح المسحوب مصنوع في المصنع I».

23 تحاول سعاد إدخال حلقات تُلقيها ، تُكرّر سعاد التجربة عدداً من المرّات. عندما تنجح سعاد في إدخال حلقة يصبح احتمال نجاحها في إدخال الحلقة اللّاحقة $\frac{1}{3}$، وعندما تفشل في إدخال حلقة يصبح احتمال فشلها في إدخال الحلقة اللّاحقة $\frac{4}{5}$. نفترض أنّ احتمال نجاح سعاد في إدخال الحلقة في المرة الأولى يساوي احتمال فشلها. نتأمّل، أيّاً كان العدد الطبيعي الموجب تماماً n ، الحدثين الآتيين:



A_n : « نجحت سعاد في إدخال الحلقة عند الرمية n».

B_n : « فشلت سعاد في إدخال الحلقة عند الرمية n».

ونعرّف $p_n = \mathbb{P}(A_n)$.

① عيّن p_1 وبرهن أنّ $p_2 = \frac{4}{15}$.

② أثبت أنّه أيّاً كانت $n \geq 2$ كان $p_n = \frac{2}{15} p_{n-1} + \frac{1}{5}$.

③ نعرّف في حالة $n \geq 1$ المقدار u_n بالعلاقة $u_n = p_n - \frac{3}{13}$ أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسيّة وعيّن حدها الأوّل u_1 وأساسها q .

④ استنتج قيمة u_n ثمّ p_n بدلالة n ، ثُمّ احسب $\lim_{n\to\infty} p_n$.

7

مستقيم الانحدار

1 المتوسّط الحسابيّ والانحراف المعياري

2 التغاير ومعامل الارتباط

3 معادلة مستقيم الانحدار

كثيراً ما نواجه في حياتنا اليوميّة أو في أبحاثنا العلميّة موسّطات ومعاملات تكون العلاقة بينها مجهولة بالنسبة إلينا، ولقد دأب الإنسان، بسبب فضوله العلميّ أو حاجته، على استقصاء مثل هذه العلاقات ووصفها وتصنيفها. بدأت القصّة في علم الوراثة عند فرانسيس غالتون *Francis Galton* الذي بحث في القرن التاسع عشر عن علاقات تربط بين سمات الآباء كالطول ولون العينين والذكاء وغيرها والسّمات الموافقة لدى الأبناء. وها نحن نتابع التساؤل فنسأل -مثلاً- أهناك علاقة بين تحصيل الطالب في مادّة وتحصيله في مادّة أخرى ؟ وكيف نَصِفُ مثل هذه العلاقة إن وُجدت ؟

لن نتعمّق كثيراً في هذا البحث المهم المسمى مستقيم الارتجاع، وسنقتصر في دراستنا على سمات بسيطة يمكن التعبير عنها بواسطة مُعاملات حقيقية، أهناك علاقة ارتباط أفّينيّة بسيطةٍ بين مُعاملين x و y. كيف نجد عددين (a,b) بحيث يكون أفضل تقدير للمقدار y بدلالة x هو $ax+b$ ؟ تسمّى هذه العمليّة ارتجاعاً. وستكون مهمّتنا شرح آليّة حساب الزوج (a,b) انطلاقاً من قراءات لعيّنة من الأزواج $\{(x_i,y_i):1\le i\le n\}$ فيها قيم المتحوّل x وما يوافقها من قيم المتحوّل y.

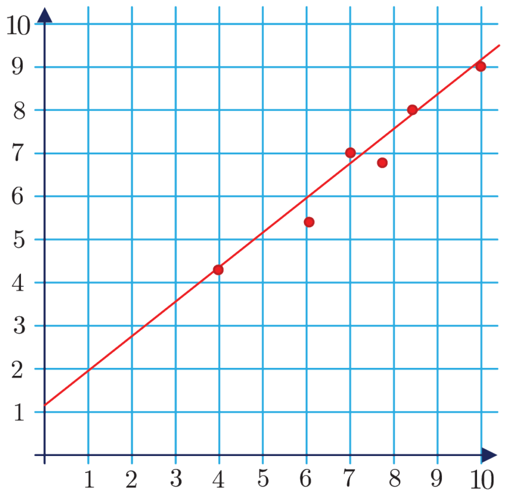
7

مستقيم الارتجاع

انطلاقة نشطة

يبين الجدول الآتي قيماً للمتغيّر x وقيم y المقابلة لها.

x	10	8.4	7.8	7	6	4
y	9	8	6.8	7	5.5	4.2



نودّ معرفة إذا كان هناك علاقة ارتباط بين المتحوّلين x و y. لذلك نمثّل الثنائيّات السابقة في مستوي الإحداثيّات كما في الشكل المجاور.

نلاحظ من الرسم أنّ هناك نوعاً ما من الارتباط، ومع أنّ تلك النقاط ليست على استقامة واحدة إلاّ أنّنا يُمكن أن نتخيّل مستقيماً يمرّ بالقرب من هذه النقاط. وهنا، أيضاً، يتبادر إلى الذهن السؤال الآتي: ما هو أقرب المستقيمات إلى هذه النقاط مجتمعةً وبأي معنى؟ وما هو مقدار قُرب هذا المستقيم إن وُجد؟

بمعنى أدقّ هل يوجد مستقيم معادلته $y = ax + b$ تكون المسافة بينه وبين النقاط السابقة أقلّ ما يُمكن، وما هي تلك المسافة في هذه الحالة ؟

في هذه الوحدة ستنصبّ دراستنا على البحث عن معادلة أفضل المستقيمات تمثيلاً للعلاقة بين عيّنتين إحصائيّتين $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ و $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

ولكن قبل ذلك يلزمنا التعرّف على بعض المقدّرات الإحصائيّة المتعلّقة بعيّنة إحصائيّة مثل المتوسط والانحراف المعياري أو بعيّنتين إحصائيّتين مثل التغاير ومُعامل الارتباط.

1 المتوسّط الحسابيّ والانحراف المعياري

1.1. المتوسّط الحسابيّ

تعريف 1

إذا كانت $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ تمثّل عيّنة مكوّنة من n قراءة لمقدار إحصائي. نعرّف **المتوسّط الحسابيّ** لهذه العينة بأنه المقدار $\overline{x}$ المعرّف بالصيغة

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

الرمز Σ (يُقرأ «مجموع» أو «سيغما»)

لكتابة قائمة من n عدداً، جرى العرف على تسميتها a_1 ، a_2 ،...، a_n . حيث يُقرأ الرمز a_i " a دليل i".
نحتاج أحياناً لكتابة مجموع هذه الأعداد، مجموع الحدود الخمسة الأولى مثلاً

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 .$$

لتبسيط هكذا كتابة، يمكننا ترميزها على الوجه الآتي $S_5 = \sum_{i=1}^{5} a_i$. يعني الرمز $\sum_{i=1}^{n} a_i$ أنّنا نجمع الأعداد a_i عندما يتحوّل الدليل i من 1 إلى n . أي $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

ومن خواصّ جمع وضرب الأعداد الحقيقيّة نرى بسهولة صحّة ما يأتي:

إذا كانت $\alpha, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ أعداداً حقيقيّة فإنّ :

① $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$ ② $\sum_{i=1}^{n} \alpha x_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i$ ③ $\sum_{i=1}^{n} \alpha = n\alpha$

مثال يبيع تاجر، 2500 ليتر من الزيت في العام الواحد بسعرين مختلفين، أثناء القطاف بـ a لليتر الواحد وبعد القطاف بـ b لليتر الواحد وكان سعر الكمية المباعة في كل شهر كما يأتي.

$$\{s_1\, a, s_2\, a, s_3\, a, s_4\, a, 200\,b, 200\,b, 200\,b, 200\,b, 200\,b, 200\,b, 200\,b, 200\,b\}.$$

العلاقة الدالّة على المتوسّط الحسابيّ لسعر الكميّة المباعة في الشهر.

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} x_i \\
&= \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{3} s_i\, a + \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{9} 200b \\
&= \frac{a}{12}900 + \frac{1}{12} \times 9 \times 200b \\
&= 75a + 150b
\end{aligned}$$

2.1. التباين والانحراف المعياري

تعريف 2

إذا كانت $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ تمثّل عيّنة مكوّنة من n قراءة لمقدار إحصائي. نعرّف **تباين العيّنة** $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$، بأنه المقدار V_x المعرّف بالصيغة

$$V_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$$

ونعرّف **الانحراف المعياري للعيّنة** $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$، بأنه المقدار $\sigma_x = \sqrt{V_x}$. وهو مقدّر إحصائي يقيس مدى ابتعاد قيم العيّنة عن متوسّطها الحسابيّ.

مُبرهَنة 1

يكتب تباين العينة $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ المكوّنة من n قراءة لمقدار إحصائي، بالصيغة

$$V_x = \overline{x^2} - \overline{x}^2$$

حيث رمزنا بالرمز $\overline{x^2}$ إلى المتوسّط الحسابيّ لمربعات قيم العيّنة أي $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

الإثبات

إن تباين العيّنة $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ هو

$$V_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$$

بنشر المطابقة $\left(x_i - \overline{x}\right)^2$ نجد

$$V_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2x_i\,\overline{x} + \overline{x}^2\right)$$

ولما كان $\sum_{i=1}^{n}\left(a_i + b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$ كان

$$V_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,\overline{x} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{x}^2$$

وبالاستفادة من تعريف المتوسّط الحسابيّ و $\sum_{i=1}^{n}\alpha x_i = \alpha\sum_{i=1}^{n} x_i$ و $\sum_{i=1}^{n}\alpha = n\alpha$ نجد

$$V_x = \overline{x^2} - 2\overline{x}\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n}\,n\,\overline{x}^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$$

تكريساً للفهم

متى نستعمل التعريف؟

مثال عيّنة مؤلّفة من درجات 5 طلاب في اختبار لمادّة الرياضيات $\{65,71,75,80,94\}$. احسب كلّاً من المتوسّط الحسابيّ والانحراف المعياري لدرجات الطلاب في مادة الرياضيات.

الحل

المتوسّط الحسابيّ لدرجات الطلاب هو $\overline{x} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = \frac{385}{5} = 77$. نلاحظ أن الدرجات قريبة نوعا ما من المتوسّط الحسابيّ، مما يجعل الفرق $x_i - \overline{x}$ صغير يسهل تربيعه، لذلك يفضل استعمال دستور التباين المعطى بالصيغة

$$V_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$$

ننظم حساباتنا في جدول كما هو موضح جانباً، وعليه، الانحراف المعياري لدرجات الطلاب هو

$$\sigma_x = \sqrt{V_x} = \sqrt{\frac{214}{5}} = \sqrt{42.8} \approx 6.54$$

i	x_i	$\lvert x_i - \overline{x}\rvert$	$(x_i - \overline{x})^2$
1	70	7	49
2	71	6	36
3	75	2	4
4	82	5	25
5	87	10	100
$\sum_{i=1}^{5}$	385		214

بوجه عام، تقع ثلاثة أرباع قيم العيّنة على الأقلّ في المجال $\left[\overline{x} - 2\sigma_x, \overline{x} + 2\sigma_x\right]$، فإذا كان الانحراف المعياري للعينة صغيراً كانت مسافات مفردات العيّنة عن المتوسّط الحسابيّ صغيرة، وفي هذه الحالة يكون المتوسّط الحسابيّ معبِّراً تعبيراً كافياً عن العيّنة.

وفي المثال السابق يمكن القول إن المجال الذي تقع فيه معظم الدرجات هو

$$\left[\overline{x} - 2\sigma_x, \overline{x} + 2\sigma_x\right] = [63.92, 90.08]$$

متى نستعمل المبرهنة 1؟

مثال عيّنة مؤلفة من عدد أولاد سبع أسر سورية $\{0,0,2,3,3,4,6\}$.

احسب كلّاً من المتوسّط الحسابيّ والانحراف المعياري لعدد أولاد الأسرة.

الحل

المتوسّط الحسابيّ لعدد أولاد الأسرة هو $\overline{x} = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} x_i = \frac{19}{7}$. نلاحظ أنه يسهل حساب مربعات مفردات العينة لذلك يفضل استعمال دستور التباين المعطى بالصيغة $V_x = \overline{x^2} - \overline{x}^2$. ننظّم حساباتنا في جدول كما هو موضح جانباً، وعليه، الانحراف المعياري لعدد أولاد الأسرة هو

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{75}{7} - \frac{361}{49}} = \frac{2\sqrt{41}}{7} \approx 1.83$$

i	x_i	x_i^2
1	0	0
2	1	1
3	2	4
4	3	9
5	3	9
6	4	16
7	6	36
$\sum_{i=1}^{7}$	19	75

ما فائدة الانحراف المعياري؟

إنّ المتوسّط الحسابيّ لعيّنة يُعطي فكرة عامّة عن قيم العيّنة ولكن ليس بالقدر نفسه بالنسبة للعيّنات المختلفة، ففي المثال الأوّل نلاحظ أنّ قيم العيّنة بعيدة نوعاً ما عن المتوسّط الحسابي بعكس المثال الثاني. وهنا تكمن أهميّة وجود مقدّر يعبّر عن تشتّت قيم العيّنة عن متوسّطها الحسابي، إنّه الانحراف المعياري. واضحٌ الفرق بين قيمتيّ الانحراف المعياري في المثالين الأخيرين، ففي المثال الأوّل كانت قيمة الانحراف المعياري كبيرة نسبيّاً (بالنسبة للمتوسط) بينما كانت قيمة الانحراف المعياري صغيرة نسبيّاً في المثال الثاني.

تَدرَّبْ

① تمثّل العيّنة $(10.5, 9, 12, 11.5, 10)$ كميّة البنزين التي تستهلكها سيّارة بالليترات عندما تقطع مسافة 100km في كلّ مرّة. احسب كلاً من المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لاستهلاك السيّارة من البنزين عند قطعها مسافة 100km.

② تمثّل العيّنة $(200, 150, 180, 280, 10, 50)$ الأرباح الشهريّة مقدّرة بآلاف الليرات وذلك في النصف الأوّل من العام. احسب كلاً من المتوسّط الحسابي للأرباح الشهريّة للشركة خلال هذه الفترة.

③ نجح طالب جامعي في السنة الأولى بمعدل 72.12 وكان الانحراف المعياري لدرجاته هو 11. جد مجالاً يحوي 75% على الأقل من درجاته.

2 التغاير ومعامل الارتباط

نلاحظ أن جميع المُقدرات في الفقرة السابقة تتعلق بعيّنة إحصائيّة واحدة $(x_1, x_2, \dots, x_n)$، سنعرض في هذه الفقرة مُقدرات تهتم بالعلاقة بين عينتين إحصائيّتين.

1.2. التغاير

تعريف 3

نتأمّل عيّنتين إحصائيتين $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ و $(y_1, y_2, \dots, y_n)$. عندئذ نعرّف **تغاير** هاتين العيّنتين بأنّه المقدار σ_{xy} المعرّف بالصيغة

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

حيث $\overline{x}$ و $\overline{y}$ هما المتوسّطان الحسابيّان للعينتّين $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ و $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ بالترتيب.

(لاحظ أنّ $\sigma_{xx} = V_x$.)

مُبرهَنة 2

يكتب تغاير العينتين $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ و $(y_1, y_2, \dots, y_n)$، بالصيغة

$$\sigma_{xy} = \overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}$$

حيث رمزنا بالرمز $\overline{xy}$ إلى المتوسّط الحسابيّ للجداءات، أي $\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

الإثبات

إن تغاير العيّنتين $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ و $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ هو

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

بنشر الأقواس والاستفادة من خواصّ Σ نجد

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i y_i - x_i\overline{y} - y_i\overline{x} + \overline{x}\,\overline{y}\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\overline{x} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{x}\,\overline{y}\\
&= \overline{xy} - \overline{y}\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \overline{x}\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i + \overline{x}\,\overline{y}\,\frac{1}{n}(n)\\
&= \overline{xy} - \overline{y}\,\overline{x} - \overline{x}\,\overline{y} + \overline{x}\,\overline{y} = \overline{xy} - \overline{y}\,\overline{x}
\end{aligned}$$

مثال الجدول الآتي يبين عدد ساعات دراسة طالب لكلّ من مادّتي الرياضيات والفيزياء في أيام الدوام في المدرسة.

عدد ساعات دراسة الرياضيات x	1	3	2	4	5
عدد ساعات دراسة الفيزياء y	6	5	4	3	2

احسب تغاير عدد ساعات دراسة الطالب في المادتين.

الحل

نبدأ بتنظيم حساباتنا في جدول كما يأتي، وعليه، تغاير عدد ساعات دراسة الطالب في المادتين يساوي

i	x	y	xy
1	1	6	6
2	3	5	15
3	2	4	8
4	4	3	12
5	5	2	10
$\sum_{i=1}^{5}$	15	20	51

$$\sigma_{xy} = \overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}$$
$$= \frac{51}{5} - \frac{15}{5} \times \frac{20}{5}$$
$$= 10.2 - 12 = -1.8$$

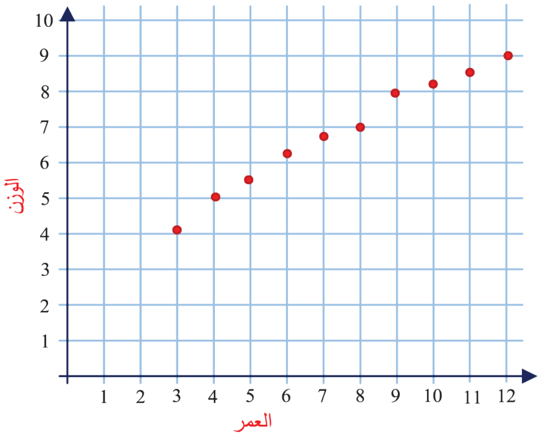
مثال الارتباط بين طول طفل رضيع ووزنه

الجدول الآتي يبين أوزان طفل في عشرة أشهر متتالية.

العمر x (شهر)	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
الوزن y (كغ ث)	4.1	5	5.5	6.2	6.8	7	8	8.3	8.5	9

إحدى الطرائق الممكنة لإلقاء نظرة شاملة على هذه العينة من النتائج هي في توضيع النقاط (x_i, y_i) في مخطط ثنائي البُعد في المستوي كما في الشكل الآتي. يسمى هذا المخطط "**سحابة الانتشار**". يوحي الرسم بوجود نوع ما من الارتباط بين عمر الطفل ووزنه، (وهي نتيجة متوقعة). سنرى لاحقاً كيف نعطي معنى رياضياً لهذا الأمر.

لاحظ التمثيل البياني لسحابة انتشار في هذه المجموعة إن هذه النقاط قريبة من مستقيم يسمى مستقيم ارتجاع العينة، ونسمي الارتباط في هذه الحالة ارتباطاً خطي (ذو علاقة خطية). سنتعرف لاحقاً كيف نكتب معادلة مستقيم ارتجاع العينة وذلك بعد **الانتباه** إلى وجود ارتباط خطّي. هل يمكنك بالاستفادة من التمثيل البياني السابق تقدير وزن طفل عمره خمسة أشهر ونصف؟



2.2. معامل الارتباط.

نتأمّل عيّنتين إحصائيتين $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ و $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$. يمكن أن ننظر إليهما بصفتهما عيّنة واحدة من الأزواج المرتبة $\{(x_i,y_i) : 1 \le i \le n\}$ أو $\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)\}$ يمثل المسقط الأوّل مجموعة قراءات لإحدى الصفات x، والمسقط الثاني القراءات الموافقة لصفة أخرى y.

تعريف 4

إذا كانت $\{(x_i,y_i) : 1 \le i \le n\}$ تمثّل عيّنة مكوّنة من n قراءة لثنائيات من المقادير الإحصائية. عندئذ نعرّف **مُعامل ارتباط** العيّنة بأنّه المقدار R_{xy} المعطى بالصيغة $R_{xy} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$

حيث σ_{xy} هو تغاير العينة، و σ_x و σ_y هما الانحرافان المعياريان للعينتين $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ و $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ بالترتيب.

مثال الجدول الآتي يبين درجات 5 طلاب في الرياضيات والفيزياء (الدرجة العظمى للمادة 10)

درجة الفيزياء x	7	9	9	10	6
درجة الرياضيات y	8	8	7	9	5

احسب كلاً من المقادير $\overline{x},\sigma_x,\overline{y},\sigma_y,\sigma_{xy}$، ثمّ احسب معامل الارتباط درجات الطلاب في المادتين.

الحل

i	x_i	x_i^2	y_i	y_i^2	x_iy_i
1	7	49	8	64	56
2	9	81	8	64	72
3	9	81	7	49	63
4	10	100	9	81	90
5	6	36	5	25	30
$\sum_{i=1}^{5}$	41	347	37	283	311
$\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}$	8.2	69.4	7.4	56.6	62.2

المتوسّط الحسابيّ لدرجات الطلاب في الفيزياء هو $\overline{x} = 8.2$. والمتوسط الحسابي لدرجات الطلاب في الرياضيات هو $\overline{y} = 7.4$. ونقرأ من الجدول

$\overline{x^2} = 69.4$ و $\overline{y^2} = 56.6$ و $\overline{xy} = 62.2$.

الانحراف المعياري لدرجات الطلاب في الفيزياء هو

$$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \sqrt{2.16} \approx 1.47$$

الانحراف المعياري لدرجات الطلاب في الرياضيات

$$\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - \overline{y}^2} = \sqrt{1.84} \approx 1.36$$

أمّا تغاير درجات الطلاب في المادتين فيساوي $\sigma_{xy} = \overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y} = 1.52$.

ومعامل ارتباط هاتين العيّنتين هو $R_{xy} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \approx \dfrac{1.52}{1.47 \times 1.36} = 0.76$.

3 معادلة مستقيم الارتجاع

نأتي الآن إلى مسألة تعيين معادلة المستقيم الأكثر تمثيلاً لعيّنة إحصائيّة من الثنائيّات $\{(x_i, y_i) : 1 \leq i \leq n\}$ والمسمّى عندئذ مستقيم الارتجاع.

بمعنى أدقّ نهدف إلى تعيين عددين a و b ليكون المستقيم d الذي معادلته $y = ax + b$ أقرب ما يمكن من نقاط العيّنة. يمكن أن نعتمد مقياساً لبُعد النقطة (x_i, y_i) عن d المقدار $(ax_i + b - y_i)$، ولكنه يأخذ قيماً موجبة أو سالبة تبعاً للنقطة (x_i, y_i)، لذلك نعتمد مربّعه $(ax_i + b - y_i)^2$، أمّا لقياس بُعد مجمل نقاط العينة عن d فنعتمد مقياساً المتوسّط الحسابيّ لمربعات هذه المسافات:

$$\Delta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(ax_i + b - y_i\right)^2$$

تُعطينا المبرهنة الآتية، قيم a، و b التي تجعل المقدار Δ أصغر ما يمكن.

مُبرهَنة

يأخذ الخطأ Δ أصغر قيمة له عندما يأخذ المقداران a و b، القيمتين $a = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$ و $b = \overline{y} - a\overline{x}$ وعندئذ تعطى القيمة الصغرى للمقدار Δ بالصيغة $\Delta = \sigma_y^2(1 - R_{xy}^2)$.

الإثبات

في الحقيقة، بنشر التربيع والجمع نجد

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(ax_i + b - y_i\right)^2 = a^2\overline{x^2} + b^2 + \overline{y^2} + 2ab\overline{x} - 2b\overline{y} - 2a\overline{xy}\\ &= a^2V_x + a^2\overline{x}^2 + b^2 + V_y + \overline{y}^2 + 2ab\overline{x} - 2b\overline{y} - (2a\sigma_{xy} + 2a\overline{x}\cdot\overline{y})\\ &= a^2V_x + V_y - 2a\sigma_{xy} + (a\overline{x} + b - \overline{y})^2\\ &= V_x\left(a - \frac{\sigma_{xy}}{V_x}\right)^2 + (a\overline{x} + b - \overline{y})^2 + V_y - \frac{\sigma_{xy}^2}{V_x}\end{aligned}$$

يبلغ المقدار Δ قيمته الصغرى عندما يكون المقداران $\left(a - \sigma_{xy}/V_x\right)$ و $(a\overline{x} + b - \overline{y})$ معدومين، أي عندما يكون $a = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$ و $b = \overline{y} - a\overline{x}$، وعندها تعطى القيمة الصغرى للمقدار Δ بالصيغة

$$\Delta = \sigma_y^2(1 - R_{xy}^2)$$

وهي النتيجة المرجوّة.

تفيد المبرهنة السابقة في وضع التعريف الآتي.

تعريف 5

إذا كانت $\{(x_i, y_i) : 1 \le i \le n\}$ تمثّل عيّنة مكوّنة من n قراءة لثنائيات من المقادير الإحصائية. عندئذ نعرّف **مستقيم ارتجاع العيّنة** بأنّه المستقيم الذي معادلته $y = ax + b$، حيث

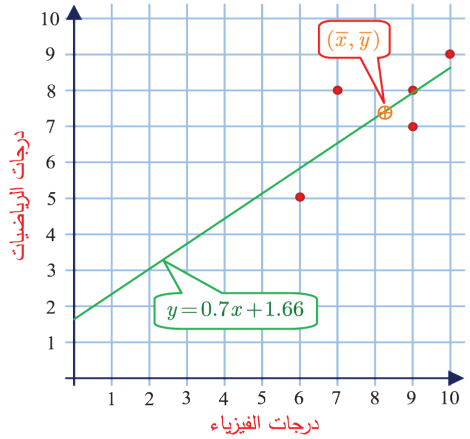
$$a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \quad \text{و} \quad b = \overline{y} - a\overline{x}$$

و σ_{xy} هو تغاير العينة، و σ_x و σ_y هما الانحرافان المعياريان للعيّنتين $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ و $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ بالترتيب، و $\overline{x}$ و $\overline{y}$ هما المتوسطان الحسابيان للعيّنتين ذاتهما بالترتيب. مستقيم الارتجاع يمر بالنقطة $(\overline{x}, \overline{y})$. وتُكتب معادلته بالصيغة المتناظرة الآتية

$$\frac{y - \overline{y}}{\sigma_y} = R_{xy}\left(\frac{x - \overline{x}}{\sigma_x}\right).$$

سنقتصر في دراستنا هنا على إيجاد معادلة مستقيم الارتجاع لعيّنة في حالة وجود الارتباط الخطّي بين مجموعة البيانات لهذه العيّنة.

مثال لتعيين مستقيم الارتجاع في المثال السابق، نلاحظ من تمثيل النقاط في مخطط ثنائي البُعد في المستوي كما في الشكل المجاور وجود نوع من الارتباط الخطّي، لذلك يمكن البحث عن معادلة مستقيم الارتجاع.



$$a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{1.52}{1.47^2} \approx 0.70$$

$$b = \overline{y} - a\overline{x} = 7.4 - 0.7 \times 8.2 \approx 1.66$$

فمعادلة مستقيم الارتجاع هي $y = 0.70x + 1.66$.

في المثال السابق اكتفينا بتقريب الناتج لخانتين عشريتين لأنّ قيم x تتراوح في المجال $[0,10]$ ولكن في مواضع أخرى قد يكون ذلك خطأً فادحاً، فمثلاً لو كانت x تأخذ قيماً من مرتبة عشرات الآلاف لوجب تقريب a لأربعة خانات بعد الفاصلة، ليكون جداء الضرب ax من مرتبة b.

نتائج

بالنظر إلى المبرهنة والتعريف الأخيرين يمكننا الوصول إلى النتائج الآتية:

- واضح من عبارة الخطأ الأصغري $\Delta = \sigma_y^2(1 - R_{xy}^2)$ أنّ معامل الارتباط يعبّر عن مدى ارتباط العيّنتين خطّيّاً. ولمّا كان Δ موجباً دوماً، كان R_{xy}^2 بين 0 و 1. وكلّما كان R_{xy}^2 قريباً من 1 كان Δ أصغر وكان الارتباط الخطّي قوياً، وكلّما كان R_{xy}^2 قريباً من الصفر كان Δ كبيراً وكان الارتباط الخطّي ضعيفاً.

- نقول عادةً إن الارتباط:
  - **تام** عندما $R_{xy}^2 = 1$ وتقع جميع نقاط سحابة الانتشار على المستقيم $y = ax + b$.
  - **قوي** عندما $R_{xy}^2 \geq 0.5$ أي معامل الارتباط يحقق $|R_{xy}| \geq 0.7$ تقريباً.
  - **متوسّط** عندما $0.25 \leq R_{xy}^2 < 0.5$ أو $0.5 \leq |R_{xy}| < 0.7$ تقريباً.
  - **ضعيف** عندما $R_{xy}^2 < 0.25$ أو $|R_{xy}| < 0.5$.
  - **معدوم** عندما $R_{xy} = 0$.
- من جهةٍ أخرى، نلاحظ أنّ إشارة R_{xy} من إشارة a (ميل مستقيم الارتجاع) لذلك، نقول إنّ الارتباط **سلبي** عندما $R_{xy} < 0$ ، و**إيجابي** عندما $R_{xy} > 0$.

مثال لنرجع إلى المثال السابق، لقد وجدنا أنّ $R_{xy} = 0.76 \geq 0.7$ إذن هناك ارتباط قوي وإيجابي بين درجات الطلاب في الفيزياء ودرجاتهم في الرياضيات.

عند القول إن معامل الارتباط معدوم مثلاً، هذا يعني أننا لا نستطيع إيجاد معادلة مستقيم يكون تقريباً لسحابة الانتشار، ولكن يمكن أحياناً إيجاد معادلة منحن يمر بكل النقاط.

تكريساً للفهم

كيف نستعمل معادلة مستقيم الارتجاع في تقدير قيم جديدة؟

مثال لتكن البيانات الممثّلة في الجدول توضح ربح السهم الواحد لكل شركة.

ربح السهم x	0.5	0.7	0.9	0.4	0.6
سعر السهم y	1.2	2.3	3	1.5	2

① احسب معامل الارتباط، ثم اكتب معادلة مستقيم ارتجاع العينة.

② ما طبيعة العلاقة بين ربح السهم وسعره؟

③ما السعر المقدر لسهم يعطي ربحاً 0.8؟

الحل

① لما كان $\bar{x} = 0.62$ و $\bar{y} = 2$ و $\sigma_x = 0.17$ و $\sigma_y = 0.63$ و $R_{xy} = 0.94$ استنتجنا أنّ $a = 3.5$ و $b = \bar{y} - a\bar{x} = -0.17$. فتكون معادلة مستقيم الارتجاع $y = 3.5x - 0.17$.

② $R_{xy} > 0$ فالارتباط إيجابي أي عند زيادة ربح السهم يزداد معه سعره. كما إنّ $R_{xy} = 0.94 \geq 0.7$ فالارتباط قوي، أي يوجد علاقة قوية بين ربح السهم وسعره.

③ نلاحظ أن الربح يقع ضمن مجال العينة $[0.4, 0.9]$ ومنه نستطيع تقدير سعر السهم. السعر التقديري للسهم الذي يعطي ربحاً 0.8 هو $y = 3.5(0.8) - 0.17 = 2.63$.

كيف نستعمل معادلة مستقيم الارتجاع في استنتاج قوانين فيزيائية ؟

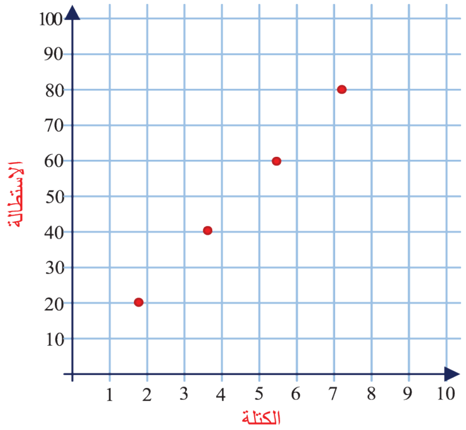
من المعلوم أنّ تعليق ثقل كتلته m في نابض مثبّت من طرفه العلوي يجعله يستطيل بمقدارٍ ما y.
ينص قانون هوك على أن نسبة الكتلة m إلى مقدار الاستطالة x ثابت، ويمكن ملاحظة ذلك بإجراء التجربة الآتية.

نثبت نابضاً مرناً شاقولياً طوله $9\,\text{cm}$ ، نفترضه مهمل الكتلة ونعلق جسماً كتلته m في نهايته السفلى. يوضح الآتي قيمة الكتلة m واستطالة النابض x بعد تعليق الكتلة m.

الكتلة m	$0\,\text{g}$	$20\,\text{g}$	$40\,\text{g}$	$60\,\text{g}$	$80\,\text{g}$
الاستطالة x	$0\,\text{cm}$	$1.8\,\text{cm}$	$3.6\,\text{cm}$	$5.5\,\text{cm}$	$7.6\,\text{cm}$

أولاً نلاحظ من تمثيل النقاط في مخطط ثنائي البُعد في المستوي كما في الشكل الآتي وجود ارتباط خطي بين هذه النقاط، لذلك نبحث عن معادلة مستقيم الارتجاع.

i	m	x	m^2	x^2	$x\,m$
1	20	1.8	400	3.24	36
2	40	3.6	1600	12.96	144
3	60	5.5	3600	30.25	330
4	80	7.2	6400	51.84	576
$\sum_{i=1}^{4}$	200	18.1	12000	98.29	1086



بعد تنظيم الجدول السابق نجد

$$\sigma_x \approx 2.02, \sigma_m \approx 22.36, \sigma_{xm} = 45.25, R_{xm} \approx 0.99, \bar{x} \approx 4.53, \bar{m} = 50$$

ومنه نجد $a = \dfrac{\sigma_{xm}}{\sigma_x^2} \approx 11.01$ و $b = \bar{m} - a\bar{x} \approx 0.02 \approx 0$.

فتكون معادلة مستقيم الارتجاع $m = 11x$ ولمّا كانت قوة توتر النابض متناسبة مع الكتلة المعلّقة به استنتجنا أنّ قوة توتر النابض متناسبة طرداً مع استطالته. وهذا ما يسمّى بقانون هوك، وتفيد هذه الدراسة في تعيين ثابت صلابة هذا النابض.

تمرينات ومسائل

1 عينة مؤلفة من أوزان 10 أطفال بعيد الولادة $\{3.1, 2.8, 2.6, 3.5, 3, 3.2, 2.9, 3.1, 2.7, 2.8\}$.
احسب كلّاً من المتوسّط الحسابيّ والانحراف المعياريّ لأوزان الأطفال.

2 أجرت شركة دعاية وإعلان دراسة حول تكلفة بطاقة الدعاية وسعر مبيعها بالليرة السورية فكان الجدول.

الكلفة x	9	10	7	14	15	12	5	11
المبيع y	150	160	150	165	180	130	130	160

① احسب كلّاً من المقادير $\overline{x}, \sigma_x, \overline{y}, \sigma_y, \sigma_{xy}$.

② احسب معامل الارتباط R_{xy}.

③ عين معادلة مستقيم ارتجاع العينة وارسمه مع سحابة الانتشار على الشكل نفسه.

3 يبين الجدول الآتي علامات مادة الرياضيات x وعلامات مادة الفيزياء y لعشرة من طلاب الشهادة الثانوية العامة في الامتحان النهائي

x	42	30	56	33	50	55	40	58	40	55
y	25	22	35	22	30	35	30	34	25	36

① احسب كلّاً من المقادير $\overline{x}, \sigma_x, \overline{y}, \sigma_y, \sigma_{xy}$.

② احسب معامل الارتباط R_{xy}، وبيّن نوع الارتباط وطبيعته.

③ عين معادلة مستقيم ارتجاع العينة وارسمه مع سحابة الانتشار على الشكل نفسه.

④ ماهي العلامة المتوقعة في الرياضيات لطالب حصل على علامة 24 في الفيزياء؟

4 يبين الجدول الآتي أوزان عشرة أطفال وأعمارهم بالأشهر.

العمر x (شهر)	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
الوزن y (كغ ث)	4	5	5.5	6	7	7	8	8	8.5	9

① احسب كلّاً من المقادير $\overline{x}, \sigma_x, \overline{y}, \sigma_y, \sigma_{xy}$ مكتفيا بتقريب مناسب للعيّنة.

② احسب معامل الارتباط R_{xy}، وبيّن نوع الارتباط وطبيعته.

③ عين معادلة مستقيم ارتجاع العيّنة وارسمه مع سحابة الانتشار على الشكل نفسه.

5 زيادة رواتب

يبلغ المتوسّط الحسابيّ للرواتب في إحدى الشركات 45350، فيما يبلغ الانحراف المعياري للرواتب 2110.

① زِيدت الرواتب بمقدار 5%.   ② زِيدت الرواتب بمقدار 3000.

أيّ حالة من الحالتين السابقتين تزيد الانحراف المعياري للرواتب أكثر؟

نحو الحلّ

فهم السؤال. يجب أولاً حساب المتوسّط الحسابيّ والانحراف المعياري للرواتب الجديدة في كلتا الحالتين ومن ثم مقارنة الانحرافين المعياريين الناتجين.

بحثاً عن طريق.

- في الحالة ①. إذا كان $\overline{x}$ هو متوسّط الراتب قبل الزيادة، فإنّ متوسط الراتب بعد الزيادة هو $\overline{y} = 1.05\overline{x}$. احسب المتوسط الجديد. ويكون الانحراف المعياري عندئذٍ $\sigma_y = 1.05\sigma_x$.
- في الحالة ②. إذا كان $\overline{x}$ هو الراتب قبل الزيادة، فإنّ الراتب بعد الزيادة هو $\overline{y} = \overline{x} + 300$. احسب المتوسط الجديد. أمّا الانحراف المعياري فيبقى دون تغيير.
- قارن بين الانحراف المعياري للرواتب في الحالة الأولى والحالة الثانية.

أنجزِ الحل واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

6 إيجاد العلاقات بالاستفادة من الارتباط التام

في ثلاثة قياسات لدرجة الحرارة في مدينة دمشق وجدنا.

درجة مئويّة x	30	31	34
فهرنهايت y	86	87.8	93.2

استعمل معادلة مستقيم ارتجاع العينة لإيجاد دستور التحويل بين وحدتي قياس الحرارة (درجة مئويّة وفهرنهايت).

نحو الحلّ

فهم السؤال. بالنظر إلى الجدول لا يمكن استخلاص العلاقة بين وحدتي قياس الحرارة. ومادام هناك دستور تحويل بين وحدتي قياس الحرارة فحتماً الارتباط تام ومنه نقاط سحابة الانتشار تقع على مستقيم ارتجاع العيّنة.

بحثاً عن طريق.

- نهتم مباشرة بإيجاد معادلة مستقيم الارتجاع.
- لذلك نوجد المتوسط والانحراف المعياري لكل من العيّنتين ومن ثم التغاير.
- نوجد معادلة مستقيم ارتجاع العيّنة فيكون بحد ذاته دستور التحويل المنشود.

أنجزِ الحل واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

7 الانحراف المعياري لاجتماع العيّنتين

لدينا عيّنتان لهما عدد العناصر نفسه n. المتوسّط الحسابي للعيّنة الأولى 4.5 وانحرافها المعياري 1.2، المتوسّط الحسابي للعيّنة الثانية 5 وانحرافها المعياري 1.4. ندمج العيّنتين. احسب المتوسّط الحسابي والانحراف المعياري للعيّنة الجديدة.

نحو الحلّ

فهم السؤال. العيّنتان لهما عدد العناصر نفسه n ومنه عدد عناصر العينة الجديدة هو $2n$، وبمعرفة المتوسّط الحسابيّ لكل عيّنة وعدد العناصر يعرف المجموع ومن ثم متوسط العيّنة الجديدة وكذلك بالنسبة للانحراف المعياري.

بحثاً عن طريق.

- احسب المتوسّط الحسابيّ للعيّنة الجديدة.
- احسب المتوسّط الحسابيّ لمربّعات حدود كلّ من العيّنتين.
- احسب المتوسّط الحسابيّ لمربّعات اجتماع العيّنتين.
- استنتج الانحراف المعياري لاجتماع العيّنتين.

أنجزِ الحل واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

8 المقارنة بين متوسطي عينتين

بلغ معدّل أحد الطلاب في الرياضيّات 51 من 60. المتوسّط الحسابي لمعدّلات الصفّ هو 42 والانحراف المعياري 6. في حين كان معدّله في الفيزياء، 30 من 40 وكان المتوسّط الحسابي لمعدّلات الصفّ 26 والانحراف المعياري 2. في أيّ مادّة يبدو الطالب أقوى؟

استعمل القيمة المعيارية $z = \dfrac{x - \overline{x}}{\sigma_x}$. وأينما كانت هذه القيمة أكبر كان الطالب أفضل قياساً من المادة الأخرى.

9 إذا كان المتوسّط الحسابي لجملة 5 والمتوسّط الحسابي لمربّعات حدودها 120، فكم يبلغ انحرافها المعياري؟

10 الانحراف المعياري لجملة هو 3 والمتوسّط الحسابّي لمربّعات حدودها هو 25. احسب متوسّطها الحسابي.

11 الانحراف المعياري لجملة هو 2 والمتوسّط الحسابّي 10 ومجموع مربّعات حدودها 2080. ما هو عدد عناصرها؟

12 نتأمّل عينتن. عدد عناصر الأولى n، متوسّطها الحسابّي $\overline{x}$ وانحرافها المعياري σ_x، عدد عناصر الثانية n، متوسّطها الحسابّي $\overline{y}$ وانحرافها المعياري σ_y. ندمج الجملتين، وليكن $\overline{u}$ المتوسّط الحسابي و σ_u الانحراف المعياري للجملة الناتجة. نعلم أنّ $\overline{u} = \dfrac{\overline{x} + \overline{y}}{2}$.

أثبت أنّ $\sigma_u^2 = \dfrac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} + \left(\dfrac{\overline{x} - \overline{y}}{2}\right)^2$.

13 يدعي سائق باص في شركة نقل أنه يتقيد بسرعة ثابتة نوعا ما في جميع رحلاته. رصدت الشركة المسافة والزمن في ثلاث رحلات له، فنتج ما يأتي.

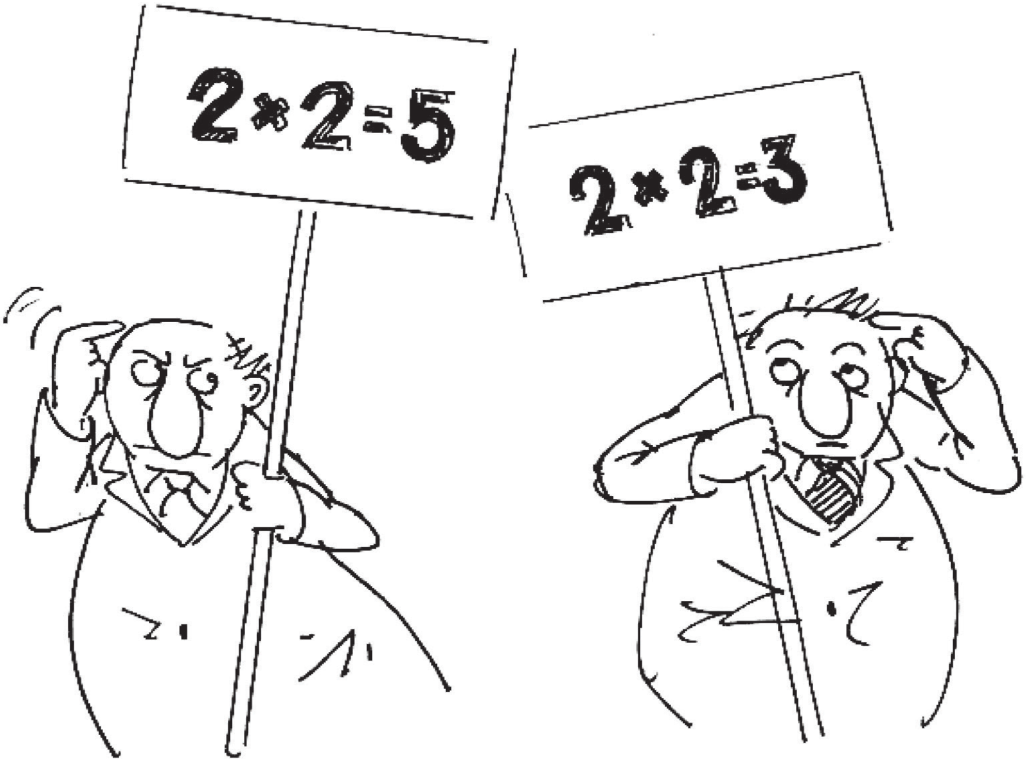
	دمشق – حمص	دمشق – طرطوس	دمشق – اللاذقية
المسافة x	160	256	350
الزمن t	ساعة وثلاثة أرباع	ساعتان ونصف	ثلاث ساعات وربع

① احسب معامل الارتباط ومن ثم مستقيم ارتجاع العينة، ترى هل ترى ادعاءه صحيحاً نوعاً ما.

② قدّر المسافة بين دمشق والسويداء إذا علمت أنّه استغرق ساعة وثلث بالسرعة السابقة نفسها تقريباً.

أمثلة على اختبارات نموذجيّة

1. اختبار للوحدة الأولى
2. اختبار للوحدة الثانية
3. اختبار للوحدة الثالثة
4. اختبار للوحدة الرابعة
5. اختبار للوحدة الخامسة
6. اختبار للوحدة السادسة
7. اختبار للوحدة السابعة
8. اختبار شاملٌ


2×2=5
2×2=3

المدة: ساعتان

اختبار للوحدة الأولى

أولاً: دلَّ على الخواصّ الصحيحة فيما يأتي معللاً اجابتك. **(100 درجة)**

1. إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ كان $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$.
2. إذا تحقّق $2\overrightarrow{NA}+3\overrightarrow{NB}=\vec{0}$ كانت النقطة N مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(A,3)$ و $(B,2)$.
3. مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(B,-1)$ و $(A,1)$ هو مبدأ الإحداثيّات.
4. مركز ثقل المثلّث ABC هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,γ) و (B,β) و (C,α).
5. إذا كانت I منتصف $[BC]$ في مثلّث ABC كان $2\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

ثانياً: حلّ التمرينين الآتيين: **(70 درجة للأول، 70 درجة للثاني)**

التمرين الأول: ليكن $ABCD$ مستطيل.

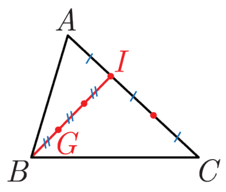
1. أنشئ النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(A,1)$ و $(B,1)$.
2. أنشئ النقطة H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,2)$.
3. أنشئ النقطة F مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,2)$ و $(D,2)$.

التمرين الثاني: ليكن المثلّث ABC. وليكن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(A,2)$ و $(B,1)$، وليكن J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(B,1)$ و $(C,-2)$، وليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(A,2)$ و $(B,1)$ و $(C,-2)$.

1. أثبت وقوع النقاط A و J و G على استقامة واحدة.
2. أثبت توازي المستقيمين (BG) و (AC).

ثالثاً: حلّ المسألة الآتية: **(60 درجة)**

ليكن المثلّث ABC المبين في الشكل المجاور. احسب α و β و γ كي تكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة (A,α) و (B,β) و (C,γ).



اختبار للوحدة الثانية

المدة: ساعتان

أولاً: دلَّ على الخواصّ الصحيحة فيما يأتي معلّلاً اجابتك. **(80 درجة)**

1. لتكن P نقطة من الدائرة $\mathcal{C}$ تُحقق $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP})=\frac{2\pi}{3}$ عندئذٍ يكون $-\frac{\pi}{3}$ أيضاً قياساً لهذه الزاوية.
2. طول قوس الدائرة $\mathcal{C}(O,2)$ المحصور بزاوية مركزية $\widehat{AOB}=\frac{\pi}{2}$ يساوي π.
3. يمكن إثبات توازي المستقيمين (AB) و (CD) بإثبات أنّ قياس $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})$ يساوي π.
4. إحداثيّتا A القطبيتان هما $\left(2;\frac{3\pi}{4}\right)$ فإحداثيّتاها الديكارتيّتان هما $A\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

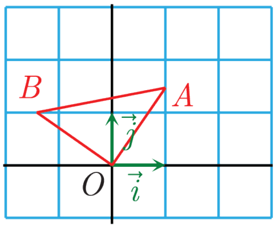
ثانياً: حلّ التمرينين الآتيين: **(65 درجة للأول، 75 درجة للثاني)**

التمرين الأول: A و B نقطتان مختلفتان في مستوٍ موجّه والمطلوب

1. عيِّن النقطة C التي تحقِّق الشرطين $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{4}$ و $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=-\frac{\pi}{6}$.
2. احسب القياس الأساسي للزاوية الموجّهة $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$.

التمرين الثاني: نعطي النقطتين $A(1,\sqrt{2})$ و $B(-\sqrt{2},1)$.

1. احسب الإحداثيّات القطبيّة للنقطتين A و B.
2. احسب قياساً للزاوية $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.
3. استنتج طبيعة المثلّث AOB.



ثالثاً: حل المسألة الآتية: **(80 درجة)**

$(O;\vec{i},\vec{j})$ مَعْلَم متجانس ومباشر. A نقطة إحداثيّتاها القطبيّتان $\left(2;-\frac{\pi}{6}\right)$. و $OABC$ مربّع فيه $(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA})=-\frac{\pi}{2}$. ارسم الشكل واستعمله لحساب $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

اختبار للوحدة الثالثة

المدة: ساعتان

أولاً: اختر كلّ إجابة صحيحة من بين الإجابات الأربعة المقترحة . **(60 درجة)**

.1	إذا كان $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\lVert\overrightarrow{AB}\rVert\cdot\lVert\overrightarrow{AC}\rVert$ كان						
A	(AB) و (AC) متعامدين	B	$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطياً	C	ABC مثلثاً	D	A و B و C على استقامة واحدة
.2	إذا كان $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ و $\lVert\overrightarrow{AB}\rVert=\sqrt{3}$ و $\lVert\overrightarrow{BC}\rVert=2$ فإن $\lVert\overrightarrow{AC}\rVert$ يساوي						
A	$\sqrt{3}$	B	3	C	2	D	1
.3	ليكن $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{C'D'}$ المسقط القائم للشعاع $\overrightarrow{CD}$ على المستقيم (AB)، عندها $\vec{u}\cdot\vec{v}$						
A	$\lVert\vec{u}\rVert\cdot\lVert\vec{v}\rVert\cos(\vec{u},\vec{v})$	B	$\frac{1}{2}\lVert\vec{u}+\vec{v}\rVert^2-\lVert\vec{u}\rVert^2-\lVert\vec{v}\rVert^2$	C	$\lVert\vec{u}\rVert.\lVert\vec{v}\rVert$	D	$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$

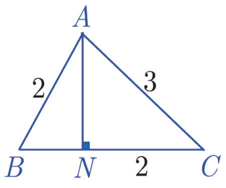
ثانياً: حلّ التمرينين الآتيين: **(60 درجة للأول، 50 درجة للثاني)**

التمرين الأول: ليكن الشعاعان $\vec{u}(-1,2)$ و $\vec{v}(3,4)$.

1. احسب كلاً من $\vec{u}\cdot\vec{v}$ و $\vec{v}^2$ و $\vec{v}(\vec{u}-2\vec{v})$ و $(\vec{u}+\vec{v})^2$.

2. احسب قيمة كلٍّ من $\lVert\vec{u}\rVert$، $\lVert\vec{v}\rVert$، $\lVert\vec{u}+3\vec{v}\rVert$ و $\lVert\vec{u}-\vec{v}\rVert$.

التمرين الثاني: باستعمال المعلومات المبيّنة في الشكل المجاور:



احسب $\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{NC}$، $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}$، $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN})\cdot\overrightarrow{NC}$، $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{NC}$.

ثالثاً: حلّ المسألتين الآتيتين: **(65 درجة للأولى، 65 درجة للثانية)**

المسألة الأولى: نتأمّل في معلمٍ متجانس النقاط $A(2,2)$ و $B(-3,-3)$ و $C(2,-3)$. H هي المسقط القائم للنقطة B على محور الفواصل، و K هي المسقط القائم للنقطة A على محور التراتيب.
أثبت أنَّ المستقيمين (OC) و (HK) متعامدان.

المسألة الثانية: A و B نقطتان، d هو المستقيم المار بالنقطة B عمودياً على (AB)، و M نقطةٌ ما من d. أثبت أنّ $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2$.

اختبار للوحدة الرابعة

المدة: ساعتان

أولاً: أجب عن الأسئلة الآتية: **(60 درجة)**

1. أيوجد مثلّث ABC، فيه $\hat{B} = 30^\circ$ و $a = 10$ و $b = 4$؟ علّل إجابتك.

2. ABC مثلث أطوال أضلاعه $BC = 2a, AC = a, AB = \sqrt{2}a$ حيث $a > 0$. ما نوعه؟

3. اكتب معادلة الدائرة التي مركزها $I(-1,1)$, ونصف قطرها $R = 3$

ثانياً: حلّ التمرينات الأربعة الآتية: **(40درجة للأول، 45 درجة للثاني، 35 درجة للثالث، 40 درجة للرابع)**

التمرين الأول: عيّن شعاعاً ناظماً على المستقيمٌ d الذي معادلته $y + 2 = 0$. ثُمّ اكتب معادلةً للمستقيم Δ المار بالنقطة $A(1,2)$ عمودياً على d.

التمرين الثاني: تأمّل النقطتين $A(3,4)$ و $B(-1,1)$، والمستقيم d ذا المعادلة $x = -1$. أنشئ الدائرة $\mathcal{C}$ المارّة بالنقطتين A و B، ومركزها I نقطةٌ من المستقيم d.

التمرين الثالث: تحقّق أنَّ $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$، ثمَّ احسب $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$.

التمرين الرابع: أطوال أضلاع المثلّث ABC هي $AB = 8$ و $AC = 3$ و $BC = 7$. احسب مساحة المثلث ABC.

ثالثاً: حل المسألة الآتية: **(60 درجة)**

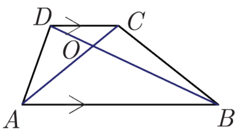
نتأمّل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ النقاط $A(2,1)$ و $B(3,0)$ و $C(-2,1)$. اكتب معادلة الدائرة $\mathcal{C}$ المارّة برؤوس المثلّث ABC.

المدة: ساعتان

اختبار للوحدة الخامسة

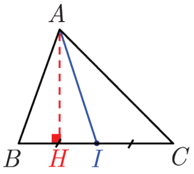
أولاً: بيّن إذا كانت المقولات الآتية صحيحة معلّلاً اجابتك. **(40 درجة)**

1. إذا كانت M' صورة M وفق التحاكي $h_{O,k}$، وقعت النقاط O و M و M' على استقامة واحدة وكان $OM' = kOM$.
2. إذا كان G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) و (B,β) وكان h تحاكياً، كان $G' = h(G)$ هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A',α) و (B',β).
3. إذا كانت النقطة M واقعة عند تقاطع مستقيمين، والنقطة M' واقعة عند تقاطع صورتيهما وفق تحاكٍ h، كانت النقطة M'، صورةَ النقطة M.
4. في الشكل المجاور، C صورة A وفق $h_{O,k}$، عندئذ تكون D صورة B وفق $h_{O,k}$.



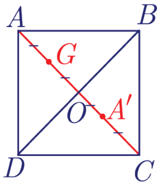
ثانياً: حلّ التمرينين الآتيين: **(80 درجة للأول، 60 درجة للثاني)**

التمرين الأول: في الشكل المجاور، ABC مثلث فيه I منتصف $[CB]$ و H منتصف BI



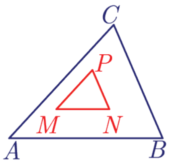
1. عيّن نسبة التحاكي h الذي مركزه H وينقل B إلى I.
2. أنشئ النقطة A' صورة النقطة A وفق التحاكي الذي مركزه I وينقل النقطة H إلى النقطة B.

التمرين الثاني: ارسم صورة المربّع $ABCD$ وفق التحاكي h الذي مركزه G وينقل النقطة A إلى A'.



ثالثاً: حلّ المسألة الآتية: **(120 درجة)**

ABC و MNP مثلّثان أضلاعهما متوازية مثنى مثنى. أثبت أنَّ المستقيمات (AM) و (BN) و (CP) تتلاقى في نقطة واحدة.



اختبار للوحدة السادسة

المدة: ساعتان

أولاً: (60 درجة)

لتكن المجموعة المنتهية Ω التي تمثّل فضاء العيّنة لتجربة ما وليكن A و B حدثين من Ω يحقّقان $A \cup B = \Omega$، $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{4}$ و $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{3}$ احسب $\mathbb{P}(B')$ و $\mathbb{P}(A \cap B)$ و $\mathbb{P}(A|B')$ **بافتراض أنّ** $p_1 = 0.5$.

ثانياً: حل التمرينين الآتيين: (40 درجة للأول، 80 درجة للثاني)

التمرين الأول: اشترك ثلاثة لاعبين x و y و z في سباق فإذا كان احتمال فوز z يساوي نصف احتمال فوز x واحتمال فوز z يساوي احتمال فوز y . فاحسب احتمال فوز x أو y علماً لاعب واحد فقط يفوز بالسباق.

التمرين الثاني: في قاعة الاستقبال في المطار، نسبة 60% من المسافرين نساءٌ، وواحدة من كل ثلاث نساء تضع نظّارات، وواحد من كل رجلين اثنين يضع نظّارات أيضاً. ما احتمال أنّ يكون شخصٌ يضعُ نظارات مسحوبٌ عشوائياً امرأةً؟

ثالثاً: حل المسألة الآتية: (120 درجة)

قرأ مُدخّنٌ مجموعة مخيفة من الإحصاءات عن أضرار التدخين وخطر الإصابة بمرض السرطان، وأمراض القلب. بناءً على هذه الإحصاءات نُقدّر ما يأتي: إذا لم يُدخّن رجلٌ في يومٍ ما فاحتمال ألاّ يُدخّن في اليوم التالي يساوي 0.3. ولكن إذا دخّن في يومٍ ما فاحتمال ألاّ يُدخّن في اليوم التالي يساوي 0.9. ليكن A_n الحدث الموافق لقيام الرجل بالتدخين في اليوم n. ولنضع $p_n = \mathbb{P}(A_n)$.

1. اكتب علاقة تدريجية تفيد في حساب p_{n+1} بدلالة p_n .
2. تحقّق أنّ المتتالية $(u_n)_n$ التي حدّها العام $u_n = p_n - \frac{7}{16}$ متتالية هندسية، ثُمّ احسب p_n بدلالة n .
3. عيّن $\lim_{n\to\infty} p_n$.

اختبار للوحدة السابعة

المدة: ساعتان

أولاً: بيّن إذا كانت المقولات الآتية صحيحة معلّلاً اجابتك. **(45 درجة)**

1. $\sum_{i=2}^{7}(-6) = -42$.
2. يكون الارتباط ضعيفاً وسلبياً عندما $R=-1$.
3. يمكن تحديد إذا كان الارتباط سلبياً أو إيجابياً من معادلة مستقيم الارتجاع.

ثانياً: حلّ التمرينين الآتيين: **(55 درجة للأول، 80 درجة للثاني)**

التمرين الأول: عيّنة مؤلفة من أرباح شركة مقدرة بعشرات الاف الليرات السورية في 10 أيام متتالية $\{5,6,6.6,8.5,6,7.2,9,3,7,8\}$. احسب كلاً من المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لأرباح الشركة.

التمرين الثاني: يُبيّن الجدول الآتي متوسّط درجات الحرارة الصغرى x والعظمى y خلال سبعة أيام عشوائية من كانون الثاني حتّى كانون الأوّل في مدينة دمشق:

الصغرى x_k	2	4	7	10	14	17	16
العظمى y_k	15	19	24	29	34	36	36

1. احسب معامل الارتباط R_{xy}.
2. عيّن معادلة مستقيم ارتجاع العينة وارسمه مع سحابة الانتشار على الشكل نفسه.

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: **(55 درجة للأول، 65 درجة للثاني)**

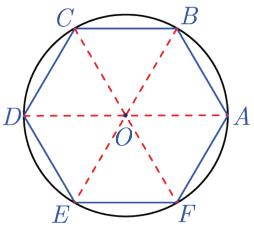
المسألة الأولى: الانحراف المعياري لعيّنة هو 6 والمتوسّط الحسابي لمربّعات حدودها هو 50. احسب متوسّطها الحسابي

المسألة الثانية: بلغت درجة أحد الطلاب في الرياضيّات 54 من 60. والمتوسّط الحسابي لدرجات الصفّ هو 38 والانحراف المعياري لهذه الدرجات 8. في حين كان درجته في مادة اللغة العربية، 32 من 40 وكان المتوسّط الحسابي لمعدّلات الصفّ 30 والانحراف المعياري 4. في أيّ مادّة يبدو الطالب أقوى؟

اختبار شامل

المدة: ثلاث ساعات

أولاً : دلَّ على الخواصّ الصحيحة فيما يأتي معللاً إجابتك. **(80 درجة)**



في الشكل المجاور $ABCDEF$ مسدّسٌ منتظمٌ مرسومٌ في دائرة مركزها O.

1. O هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(B,-3)$ و $(E,1)$.
2. القياس الأساسي للزاوية الموجّهة $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})$ هو $-\frac{2\pi}{3}$.
3. $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OB}$.
4. $CB^2+CE^2=2CO^2+\frac{BE^2}{2}$.
5. صورة المثلث OAB وفق تحاكٍ مركزه O ونسبته 1 هي المثلّث OED .
6. صورة الدائرة المارّة من رؤوس المضلّع $ABCDEF$ وفق تحاكٍ مركزه O ونسبته $\frac{\sqrt{3}}{2}$ هي الدائرة الماسّة داخلاً لهذا المضلع .
7. مساحة الدائرة المارّة برؤوس المثلث OCD تعطى بالعلاقة $S=\frac{CD^3}{4R}$
8. نتأملّ النقطتين المثقّلتين (B,n) و $(E,1)$ وليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين E و B فإن $\frac{GE}{GB}=n$.

ثانياً: حلّ التمارين الثلاثة الآتية: **(40 درجة للأول، 40 درجة للثاني، 40 درجة للثالث)**

التمرين الأول:

نعطي النقطتين A و B، ونعرّف G بالعلاقة $4\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$. عيّن عددين α و β كي تكون النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) و (B,β).

التمرين الثاني:

نتأمّل في معلمٍ متجانس النقاط $A(1,2)$ و $B(-2,0)$ و $C(-1,k)$. والنقطة N هي المسقط القائم للنقطة B على محور الفواصل، و M هي المسقط القائم للنقطة A على محور التراتيب. عيّن k لكي يكون المستقيمان (OC) و (NM) متعامدين.

التمرين الثالث:

لدراسة العلاقة بين وزن شخص وضغط دمه الأعلى. يبين الجدول الآتي عينة من خمسة أشخاص.

الوزن x_k	90	85	60	63	75
ضغط الدم y_k	180	172	165	160	175

احسب معامل الارتباط R_{xy}.

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: **(50 درجة للأول، 50 درجة للثاني)**

المسألة الأولى:

$ABCD$ رباعي محدّب فيه $AB = 5$ ، $BC = 3$ وقياسات زواياه $\widehat{ABC} = 150^\circ$ و $\widehat{BCD} = 60^\circ$ و $\widehat{BAD} = 90^\circ$. احسب مساحة الرباعي $ABCD$.

المسألة الثانية:

نعلم أنّه في شهر آذار من أحد الأعوام، كانت نسبة المصابين بمرض التهاب الكبد تساوي 3%. لدينا اختبارات لتقصّي الإصابة بهذا المرض وفق الآتي:

- إذا كان المرء مصاباً بالمرض فالاختبار يعطي نتيجة إيجابية باحتمال قدره 95%.
- وإذا كان المرء صحيحاً، فاحتمال أن يعطي الاختبار نتيجة إيجابية يساوي 10%.

1. ما احتمال أن يكون المرء مصاباً إذا كانت نتيجة الاختبار إيجابية؟
2. ما احتمال أن يكون المرء صحيحاً إذا كانت نتيجة الاختبار إيجابية؟
3. ما احتمال أن يكون المرء مصاباً إذا كانت نتيجة الاختبار سلبية؟
4. ما احتمال أن يكون المرء صحيحاً إذا كانت نتيجة الاختبار سلبية؟

مسرد المصطلحات العلمية

الانكليزية	العربية
Conditional probability	الاحتمال المشروط
Independent events	أحداث مستقلة احتمالياً
Polar coordinates	إحداثيات قطبية
Height	ارتفاع (مثلث)
Standard deviation	الانحراف المعياري
Translation	انسحاب
Variance	التباين
Random experiment	تجربة عشوائية
Dilation-Homothety	تحاكي
Similarity	تشابه
Covariance	التغاير
Frequency	تكرار
Axial symmetry	تناظر محوري
Central symmetry	تناظر مركزي
Scalar product	الجداء السلُّمي
Sine	جيب
Cosine	جيب التمام(تجيب)
Event	حدث
Simple event	حدث بسيط
Circle	دائرة
Rotation	دوران
Acute angle	زاوية حادة
Right angle	زاوية قائمة
Obtuse angle	زاوية منفرجة
Oriented angle	زاوية موجهة
Vector	شعاع
colinear vectors	شعاعان مرتبطان خطياً
Sample space	فضاء العينة
Probability law	قانون احتمال

الانكليزية	العربية
Measure	قياس (زاوية)
Principal measure	قياس أساسي (زاوي)
Isosceles triangle	متساوي الساقين (مثلث)
Concurrent	متلاقية (مستقيمات)
Parallelogram	متوازي الأضلاع
Median	متوسط (مثلث)
Mean value	المتوسط الحسابي
Triangle	مثلث
Axis of symmetry	محور تناظر
Square	مربع
Barycenter	مركز الأبعاد المتناسبة
Centroid-Center of Gravity	مركز الثقل
Center of symmetry	مركز تناظر
Area	مساحة
Line	مستقيم
Regression line	مستقيم الارتجاع
Orthogonal lines	مستقيمان متعامدان
Parallel lines	مستقيمان متوازيان
Correlation coefficient	معامل الارتباط
Coordinate system	مَعلَم
Midpoint	منتصف (قطعة مستقيمة)
Ratio	نسبة (التحاكي)
Symmetric	نظيرة (نقطة)
Norm	نظيم (شعاع)
Weighted points	نقاط مُثقّلة
Orthocenter	نقطة تلاقي الارتفاعات